

MA2001-1 Cálculo en Varias Variables. Semestre 2010-2

Profesor: Marcelo Leseigneur Auxiliares: Víctor Verdugo y Sebastián Bustamante

Control 3

Miércoles 24 de Noviembre 2010

P2. Dada la función $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$f(x, y, z) = xy + z$$

determine si existen mínimo y máximo global de la función sobre la región

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - xy + z^2 \leq 1\}$$

En caso de existir, calcúlelos.

Sea $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x, y, z) = x^2 + y^2 - xy + z^2$. Tenemos que g es continua y $(-\infty, 1]$ es un cerrado de $\mathbb{R}$, luego, $A = g^{-1}((-\infty, 1])$ es cerrado en $\mathbb{R}^3$ (pues es preimagen de un cerrado mediante una función continua). Por otro lado, sea $(x, y, z) \in A$:

$$\begin{aligned} \Rightarrow x^2 + y^2 - xy + z^2 &\leq 1 \\ \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 &\leq 1 + xy \\ \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 &\leq 1 + \frac{x^2 + y^2}{2} \\ \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 &\leq 1 + \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2} \\ \Rightarrow \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2} &\leq 1 \\ \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 &\leq 2 \\ \Rightarrow \|(x, y, z)\|_2 &\leq \sqrt{2} \end{aligned}$$

Luego, A es cerrado y acotado en $\mathbb{R}^3$, y por lo tanto, es compacto. Este hecho, sumado a que $f(x, y, z) = xy + z$ es continua, garantiza que el máximo y el mínimo de f se alcanzan en A . Para encontrarlos, procedamos a estudiar primero $\text{int}(A)$ y luego ∂A .

$$a) \text{int}(A) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - xy + z^2 < 1\}$$

Puesto que $\text{int}(A)$ es abierto, imponemos la condición necesaria de primer orden, y luego de eso vemos cuales de los candidatos están en A :

$$\nabla f(x, y, z) = 0$$

De aquí se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) &= y = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) &= x = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) &= 1 \neq 0 \end{aligned}$$

Es decir, $\nabla f(x, y, z) \neq 0$, $\forall (x, y, z) \in \text{int}(A)$, y por lo tanto en esta región no hay candidatos a mínimos ni máximos locales (tampoco globales).

$$b) \partial A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - xy + z^2 = 1\}$$

En este caso, usamos el método de los multiplicadores de Lagrange:

$$L(x, y, z, \lambda) = xy + z - \lambda(x^2 + y^2 - xy + z^2 - 1)$$

Imponemos la condición necesaria de primer orden:

$$\nabla L(x, y, z, \lambda) = 0$$

lo cual origina el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} y - 2\lambda x + \lambda y &= 0 \\ x - 2\lambda y + \lambda x &= 0 \\ 1 - 2\lambda z &= 0 \\ x^2 + y^2 - xy + z^2 &= 1 \end{aligned}$$

De la tercera ecuación se desprende que $\lambda \neq 0$, y de las dos primeras se tiene:

$$\begin{aligned} y(\lambda + 1) &= 2\lambda x \\ x(\lambda + 1) &= 2\lambda y \end{aligned}$$

Si $\lambda = -1$, entonces $x = y = 0$, y de la tercera y cuarta ecuación se obtiene que z es $-\frac{1}{2}$ y ± 1 respectivamente, lo que es una contradicción. Luego, obtenemos:

$$\begin{aligned} y &= x \left(\frac{2\lambda}{\lambda + 1} \right) \\ x &= y \left(\frac{2\lambda}{\lambda + 1} \right) \end{aligned}$$

Reemplazando en la primera ecuación el valor de x obtenido en la segunda ecuación:

$$y \left[1 - \frac{4\lambda^2}{(\lambda + 1)^2} \right] = 0$$

Si $y = 0$, se tiene que $x = 0$, y reemplazando estos valores en la cuarta ecuación se obtienen dos candidatos:

$$a_1 = (0, 0, 1) \quad y \quad a_2 = (0, 0, -1)$$

Ahora se despeja λ , que arroja dos valores:

$$\lambda_1 = 1 \quad y \quad \lambda_2 = -\frac{1}{3}$$

Para $\lambda_1 = 1$ se despeja z de la tercera ecuación, obteniendo $z = \frac{1}{2}$ y de las dos primeras queda $x = y$. Reemplazando en la cuarta ecuación se tienen los candidatos:

$$\begin{aligned} a_3 = (x_1, y_1, z_1) &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right) \\ a_4 = (x_2, y_2, z_2) &= \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right) \end{aligned}$$

Para $\lambda_2 = -\frac{1}{3}$, se despeja z de la tercera ecuación, obteniendo $z = -\frac{3}{2}$ y de la primera o segunda ecuación se tiene que $x = -y$. Usando esto en la cuarta ecuación, queda:

$$x^2 = -\frac{5}{12}$$

y por lo tanto, este caso no entrega candidatos. Finalmente, como la existencia de máximo y mínimos globales en la región A está garantizada, y en $\text{int}(A)$ no habían candidatos, necesariamente deben estar en ∂A . Luego, nos basta evaluar en los puntos a_1, a_2, a_3, a_4 para ver en cuales de ellos se alcanzan el mínimo y máximo global:

$$\begin{aligned} f(a_1) &= 1 \\ f(a_2) &= -1 \\ f(a_3) &= f(a_4) = \frac{5}{4} \end{aligned}$$

Se concluye entonces que el mínimo global se alcanza en $a_2 = (0, 0, -1)$ y el máximo global se alcanza en los puntos $a_3 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right)$ y $a_4 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right)$.