Cálculo en Varias Variables
Auxiliar 15 - Primavera 2010

Prof: Marcelo Leseigneur
Aux: Sebastián Bustamante F. & Víctor Verdugo S.

Extremos relativos:
Sea $f : C \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciable en un cierto punto $a \in C$. Se verifica que:

- Si f tiene un extremo relativo en a, entonces $\nabla f(a) = 0$. El recíproco es falso, en general.
- Se llaman puntos críticos de la función diferenciable f a aquellos $a \in C$ tales que $\nabla f(a) = 0$.

Consideremos ahora una función real $f : C \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, de clase $\mathcal{C}^2$ en C; sea $a \in C$ un punto crítico de f. Entonces se puede asegurar que:

- Si $Hf(a)$ es definida positiva, entonces f tiene en a un mínimo relativo.
- Si $Hf(a)$ es definida negativa, entonces f tiene en a un máximo relativo.
- Si $Hf(a)$ no es definida ni semidefinida, entonces en a no hay un extremo de f.
- Si $Hf(a)$ es semidefinida, entonces este método no da información.

Extremos condicionados:
Si un problema de optimización con restricciones de igualdad de la forma:

$$\begin{array}{cc} opt & f(x) \\ s.a. & g_1(x) = 0 \\ & \vdots \\ & g_m(x) = 0 \end{array}$$

tiene un óptimo local en el punto x_0, donde $f, g_1, \ldots, g_m \in \mathcal{C}^1$ y los vectores gradientes de las funciones de restricción son linealmente independientes en x_0, entonces existen $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ (multiplicadores de Lagrange) tales que:

$$\nabla f(x_0) + \lambda_1 \nabla g_1(x_0) + \cdots + \lambda_m \nabla g_m(x_0) = 0,$$

es decir, para la función $L(x, \vec{\lambda}) = f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x)$, se tiene que x_0 es un punto crítico ($\nabla L(x_0, \lambda) = 0$).

P1. Calcular los valores máximo y mínimo de la función

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

sobre la superficie del elipsoide

$$M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{36} + \frac{z^2}{25} - 1 = 0\}.$$

P2. Determinar los extremos absolutos de la función

$$f(x, y) = 2x^2 - 3y^2 - 2x$$

en el conjunto

$$M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 5\}.$$

P3. Considere la función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y suponga que es de clase $\mathcal{C}^2$.

(i) Demuestre que si f tiene un mínimo local en x_0 entonces la matriz Hessiana $Hf(x_0)$ es semidefinida positiva, es decir,

$$h^t Hf(x_0) h \geq 0 \quad \forall h \in \mathbb{R}^n.$$

(ii) Suponga que la función $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ satisface la ecuación diferencial

$$\Delta u(x) = -1 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Demuestre que u no puede tener un mínimo local.