Esta función es de clase $\mathscr{C}^2$ en todo $\mathbb{R}^2$ y, en el punto $(0, 0)$, es evidente que $f''_{xx}(0, 0) = 2$, $f''_{xy}(0, 0) = 0$ y $f''_{yy}(0, 0) = 0$, con lo que

$$d^2f(0, 0)(\Delta x, \Delta y) = 2(\Delta x)^2$$

que es una forma cuadrática semidefinida positiva. Ahora bien, según el signo de k, se tiene:

- $k > 0 \;\Rightarrow\; f(x, y) - f(0, 0) > 0 \;\Rightarrow\; \left| \begin{array}{l} f \text{ tiene un mínimo relativo} \\ \text{en sentido estricto en } (0, 0) \end{array} \right.$

- $k < 0 \;\Rightarrow\; \left\{ \begin{array}{l} f(x, 0) - f(0, 0) > 0 \\ f(0, y) - f(0, 0) < 0 \end{array} \right\} \;\Rightarrow\; \left| \begin{array}{l} f \text{ carece de extremo} \\ \text{relativo en } (0, 0) \end{array} \right.$

- $k = 0 \;\Rightarrow\; \left\{ \begin{array}{l} f(x, y) > f(0, 0), \text{ si } x \neq 0 \\ f(0, y) - f(0, 0) = 0 \end{array} \right\} \;\Rightarrow\; \left| \begin{array}{l} f \text{ tiene un mínimo relativo} \\ \text{en sentido amplio en } (0, 0) \end{array} \right.$

4.° Supongamos finalmente, para comprobar la «nota», que f es de clase $\mathscr{C}^3$ en C, que $df(\boldsymbol{a}) = o$, que $d^2f(\boldsymbol{a}) = o$ y que $d^3f(\boldsymbol{a}) \neq o$. Nótese, en primer lugar, que esta última relación significa que existe un vector no nulo $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^p$ tal que $d^3f(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{u}) \neq 0$. Consideremos la siguiente función real φ:

$$t \mapsto \varphi(t) = f(\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{u}) \qquad \text{(definida en un entorno de } t = 0)$$

Es evidente que esta función es tres veces derivable en $t = 0$ y que:

$$\varphi'(0) = \frac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial \boldsymbol{u}} = d^2f(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{u}) = 0$$

$$\varphi''(0) = \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{a})}{\partial \boldsymbol{u}^2} = d^2f(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{u}) = 0$$

$$\varphi'''(0) = \frac{\partial^3 f(\boldsymbol{a})}{\partial \boldsymbol{u}^3} = d^3f(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{u}) \neq 0$$

luego φ tiene un punto de inflexión en $t = 0$, por lo que $\varphi(t) - \varphi(0)$ tiene distinto signo para $t > 0$ que para $t < 0$, es decir:

$$\text{signo de } [f(\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{u}) - f(\boldsymbol{a})] \neq \text{signo de } [f(\boldsymbol{a} - t\boldsymbol{u}) - f(\boldsymbol{a})]$$

(para t en un cierto entorno de $t = 0$), por lo que f no tiene un extremo relativo en $\boldsymbol{a}$.

[45]$_1$ Recordatorios acerca de las formas cuadráticas

Traemos aquí aquellas definiciones y resultados, sobre las formas cuadráticas, que son necesarios para manejarse debidamente en el estudio de los extremos relativos. De cuanto se nos supone conocido a este respecto, del Álgebra Lineal, sólo vamos a ocuparnos de aquello que ahora nos hace falta acerca de las formas cuadráticas, de $\mathbb{R}^p$ en $\mathbb{R}$:

a) *Forma cuadrática.* Una forma cuadrática en $\mathbb{R}^p$ es toda aplicación del tipo:

$$\omega : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}, \qquad \omega(\boldsymbol{x}) = \sum_{i,j=1}^{p} a_{ij}x_ix_j, \qquad \text{siendo} \left\{ \begin{array}{l} a_{ij} = a_{ji} \in \mathbb{R} \text{ dados} \\ \boldsymbol{x} = (x_1, x_2, ..., x_p) \end{array} \right.$$

Acudiendo a la matriz $A = [a_{ij}]$ (simétrica de tamaño $p \times p$; donde a_{ij} está situado en la fila i y la columna j), que se llama matriz de ω, y denotando por X a la matriz columna que forman las coordenadas de $\boldsymbol{x}$, se puede poner que

$$\omega(\boldsymbol{x}) = X^tAX = [x_1 \cdots x_p] \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{pp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix}$$

b) *Cambio de base; matrices congruentes.* Si en $\mathbb{R}^p$ se cambia la base, con lo que la nueva matriz columna de coordenadas, X', se relaciona con la anterior, X, mediante una relación del tipo $X = QX'$ (donde Q es la «matriz de cambio de coordenadas», de tamaño $p \times p$), la expresión de $\omega(\boldsymbol{x})$ en la nueva base es:

$$\omega(\boldsymbol{x}) = X'^tA'X', \qquad \text{donde } A' = Q^tAQ$$

Se dice que las matrices simétricas A y A' son congruentes si existe Q, matriz regular, tal que $A' = Q^tAQ$.

c) *Diagonalización; rango y signatura.* Existen bases de $\mathbb{R}^p$ en las que la matriz de ω es diagonal. Las matrices diagonales de ω (en las correspondientes bases) tienen todas igual número α de elementos positivos e igual número β de elementos negativos (ley de inercia); se llama signatura de ω (sig ω) al par (α, β). Se llama rango de ω (rang ω) al rango de una cualquiera de las matrices asociadas (en las distintas bases de $\mathbb{R}^p$) a ω, que es el mismo para todas las matrices; se verifica que rang $\omega = \alpha + \beta$.

d) *Relación entre autovalores, rango y signatura.* Una de las matrices diagonales asociadas a ω es aquella cuya diagonal está ocupada por los p autovalores $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p$ de A (a cada uno de ellos se le cuenta tantas veces como indique su orden de multiplicidad). Por ello:

$$\text{rang } \omega = (\text{número de autovalores no nulos de } A)$$

$$\text{sig } \omega = (\text{núm. de autovalores positivos de } A, \text{ núm. de autovalores negativos de } A)$$

A este respecto, para hallar la signatura conviene tener en cuenta que, si la ecuación característica de A es $\det(A - \lambda I) \equiv c_0 + c_1\lambda + \cdots + c_p\lambda^p$, el número de autovalores positivos de A es igual al número de cambios de signo que se presentan en la sucesión $(c_0, c_1, ..., c_p)$; si alguno de estos números fuese nulo, $c_i = 0$, se le asignará el signo que se quiera.

e) *Formas definidas y semidefinidas.* Se dice que la forma cuadrática ω es definida positiva (respectivamente, definida negativa) si $\omega(\boldsymbol{x}) > 0$ (respectivamente, si $\omega(\boldsymbol{x}) < 0$), para todo vector no nulo $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^p$. Se dice que ω es semidefinida positiva (respectivamente, semidefinida negativa) si $\omega(\boldsymbol{x}) \geqslant 0$ (resp., si $\omega(\boldsymbol{x}) \leqslant 0$) para todo $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^p$ y, además, es $\omega(\boldsymbol{x}_0) \neq 0$ para algún $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^p$. Se verifica que:

$$\begin{array}{lll} \omega \text{ es definida positiva} & \Leftrightarrow \ \operatorname{sig} \omega = (p, 0) & \\ \omega \text{ es definida negativa} & \Leftrightarrow \ \operatorname{sig} \omega = (0, p) & \\ \omega \text{ es semidefinida positiva} & \Leftrightarrow \ \operatorname{sig} \omega = (r, 0), & \text{con } r < p \\ \omega \text{ es semidefinida negativa} & \Leftrightarrow \ \operatorname{sig} \omega = (0, r), & \text{con } r < p \end{array}$$

f) *Criterio de Sylvester.* Si Δ_k es el determinante de orden k que forman los elementos de las k primeras filas y las k primeras columnas de la matriz A, para $k = 1, 2, ..., p$, entonces se verifica que:

$$[\omega \text{ es definida positiva}] \ \Leftrightarrow \ [\Delta_k > 0 \quad \text{para } k = 1, 2, ..., p]$$

$$[\omega \text{ es definida negativa}] \ \Leftrightarrow \ [(-1)^k \Delta^k > 0 \quad \text{para } k = 1, 2, ..., p]$$

g) *Diagonalización por congruencia mediante operaciones elementales.* Se llaman operaciones elementales, realizadas en líneas paralelas (filas o columnas) de una matriz a las siguientes manipulaciones: cambiar entre sí dos líneas paralelas; multiplicar una línea por un número no nulo; sumarle a una línea cualquier combinación de líneas paralelas a aquélla; o cualquier combinación de las manipulaciones anteriores. Dada una matriz A simétrica, al aplicar a sus filas cualesquiera operaciones elementales y aplicar después a sus columnas las mismas operaciones elementales, se obtiene una matriz simétrica A' que es congruente con A. Procediendo metódicamente, aplicando adecuadas operaciones elementales, a las filas y luego a las columnas de A, es fácil obtener una matriz A' que sea diagonal, con lo que se consigue diagonalizar la forma cuadrática ω que tiene a A por matriz.

[45]$_2$ Ejercicio

Hallar los extremos relativos de la función $u: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por

$$u(x, y, z) = x^2 z + y^2 z + \frac{2}{3} z^3 - 4x - 4y - 10z + 1$$

Resolución

Empecemos hallando los puntos estacionarios de u, entre los que han de estar sus posibles extremos relativos, esto es, resolvamos el sistema de ecuaciones $u'_x = 0$, $u'_y = 0$, $u'_z = 0$:

$$\begin{array}{lll} u'_x = 2xz - 4 & u'_x = 0 & x = 2/z \\ u'_y = 2yz - 4 & u'_y = 0 \ \Leftrightarrow & y = 2/z \\ u'_z = x^2 + y^2 + 2z^2 - 10 & u'_z = 0 & x^2 + y^2 + 2z^2 - 10 = 0 \end{array}$$

cuyas soluciones son, obviamente, las cuatro ternas:

$$\begin{array}{ll} (x_1, y_1, z_1) = (2, 2, 1), & (x_2, y_2, z_2) = (-2, -2, -1) \\ (x_3, y_3, z_3) = (1, 1, 2), & (x_4, y_4, z_4) = (-2, -1, -1) \end{array}$$

Acudamos al método de la diferencial segunda, d^2u, para lo que obtendremos la matriz hessiana $H(u)$ (matriz de d^2u), que es:

$$H(u) = \begin{bmatrix} u''_{xx} & u''_{xy} & u''_{xz} \\ u''_{yx} & u''_{yy} & u''_{yz} \\ u''_{zx} & u''_{zy} & u''_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2z & 0 & 2x \\ 0 & 2z & 2y \\ 2x & 2y & 4z \end{bmatrix}$$

En cada uno de los cuatro puntos estacionarios de u, la matriz hessiana es entonces la que se indica a continuación, donde también se ha dado una diagonalización de la misma (el signo $\sim$ significa: congruente con), la que nos permite clasificar d^2u (en definida positiva, definida negativa, semidefinida, ni definida ni semidefinida):

$$H(u)_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 4 & 4 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -12 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad (d^2u)_1 \text{ no es definida ni es semidefinida}$$

$$H(u)_2 = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -4 \\ 0 & -2 & -4 \\ -4 & -4 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad (d^2u)_2 \text{ no es definida ni es semidefinida}$$

$$H(u)_3 = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad (d^2u)_3 \text{ definida positiva}$$

$$H(u)_4 = \begin{bmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 0 & -4 & -2 \\ -2 & -2 & -8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad (d^2u)_4 \text{ definida negativa}$$

Por tanto, la función u tiene dos extremos relativos, que son:

un mínimo relativo en $(x, y, z) = (1, 1, 2)$, con $u(1, 1, 2) = -53/3$
un máximo relativo en $(x, y, z) = (-1, -1, -2)$, con $u(-1, -1, -2) = 59/3$

[45]$_3$ Caso particular: funciones de dos variables

Para determinar los extremos relativos de una función real de dos variables reales, $(x, y) \mapsto f(x, y)$, de clase $\mathscr{C}^2$ en un conjunto abierto $C \subset \mathbb{R}^2$, se puede proceder del siguiente modo:

1.º Se buscan los puntos estacionarios de f, esto es, los puntos $(a, b) \in C$ tales que $f'_x(a, b) = 0$ y $f'_y(a, b) = 0$; entre los tales puntos (a, b) han de estar los posibles extremos relativos de f.

2.º En el supuesto de que (a, b) es solución del sistema $f'_x(a, b) = 0$, $f'_y(a, b) = 0$ y llamando $\Delta(a, b)$ al determinante hessiano de f en (a, b), es decir, si

$$\Delta(a, b) = \begin{vmatrix} f''_{xx}(a, b) & f''_{xy}(a, b) \\ f''_{yx}(a, b) & f''_{yy}(a, b) \end{vmatrix} = f''_{xx}(a, b) f''_{yy}(a, b) - f''_{xy}(a, b)^2$$

entonces el método de la diferencial segunda conduce a que:

- $[\Delta(a, b) > 0$ y $f''_{xx}(a, b) > 0] \Rightarrow \begin{cases} f \text{ tiene un mínimo relativo} \\ \text{estricto en el punto } (a, b) \end{cases}$
- $[\Delta(a, b) > 0$ y $f''_{xx}(a, b) < 0] \Rightarrow \begin{cases} f \text{ tiene un máximo relativo} \\ \text{estricto en el punto } (a, b) \end{cases}$
- $[\Delta(a, b) < 0] \Rightarrow \begin{cases} f \text{ no tiene un extremo relativo en } (a, b) \text{ (se dice} \\ \text{que } (a, b) \text{ es punto de ensilladura o puerto de } f) \end{cases}$
- (si $\Delta(a, b) = 0$, el método de la diferencial segunda no da información)

Comprobación

Cuanto se acaba de decir se obtiene particularizando lo recién obtenido en [45], a nuestro caso particular, teniendo en cuenta el criterio de Sylvester (véase $[45]_1$, f); este criterio conduce obviamente a las cuatro conclusiones del punto segundo del anterior enunciado. A este mismo resultado se llega fácilmente si se tiene en cuenta que la diferencial segunda

$$d^2f(a, b)(\Delta x, \Delta y) = f''_{xx}(a, b)\Delta x^2 + 2f''_{xy}(a, b)\Delta x\,\Delta y + f''_{yy}(a, b)\Delta y^2$$

es definida positiva, definida negativa, semidefinida o ni definida ni semidefinida según que (suponiendo, por ejemplo, que $f''_{xx}(a, b) \neq 0$) la función de segundo grado (en la variable $t = \Delta x/\Delta y$)

$$F(t) = f''_{xx}(a, b)t^2 + 2f''_{xy}(a, b)t + f''_{yy}(a, b)$$

(cuya representación es una parábola de eje «vertical») sea respectivamente: positiva para todo t, negativa para todo t, tenga una raíz doble o tenga dos raíces reales y distintas. Como el discriminante de la ecuación de segundo grado $F(t) = 0$ es $-\Delta(a, b)$, las anteriores posibilidades se corresponden, respectivamente, con $\Delta(a, b) > 0$ y $f''_{xx}(a, b) > 0$, $\Delta(a, b) > 0$ y $f''_{xx}(a, b) < 0$, $\Delta(a, b) = 0$ y $\Delta(a, b) < 0$, lo que confirma lo dicho en el anterior enunciado.

Según ya se ha señalado, en el caso de ser $\Delta(a, b) < 0$ se dice que (a, b) es un punto de ensilladura o puerto de f. Nótese que en estos casos, si el punto variable (x, y) se acerca al (a, b) siguiendo una recta, acontece que para algunas de estas rectas, que pasan por (a, b), f presenta un máximo relativo, en (a, b), y según otras presenta mínimo relativo. Esta es la situación que se presenta con la altura de los puestos de montaña o en una silla de montar, en la zona destinada a ubicar las posaderas; de ahí vienen los nombres de punto puerto o de ensilladura que dijimos anteriormente.

$[45]_4$ Ejercicio

Hallar los extremos relativos de la siguiente función, de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$:

$$(x, y) \mapsto z = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$$

Resolución

Los puntos estacionarios de $z(x, y)$, es decir, las raíces del sistema $z'_x = 0$, $z'_y = 0$, son:

$$\left.\begin{aligned} z'_x &\equiv 4x^3 - 4x + 4y = 0 \\ z'_y &\equiv 4y^3 + 4x - 4y = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} (x_0, y_0) = (0, 0) \\ (x_1, y_1) = (\pm\sqrt{2}, \mp\sqrt{2}) \end{cases}$$

Para ver si en dichos puntos hay extremo relativo de z, acudiendo a la matriz hessiana

$$H(x, y) = \begin{bmatrix} z''_{xx} & z''_{xy} \\ z''_{yx} & z''_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12x^2 - 4 & 4 \\ 4 & 12y^2 - 4 \end{bmatrix}$$

y a su determinante $\Delta(x, y)$ (hessiano), según lo dicho en $[45]_3$ se tiene:

- $\Delta(x_1, y_1) = 384 > 0$ y $z''_{xx}(x_1, y_1) = 20 > 0 \to \begin{cases} z \text{ tiene un mínimo relativo en} \\ (x_1, y_1), \text{ que vale } z(x_1, y_1) = 8 \end{cases}$
- $\Delta(x_0, y_0) = 0 \to$ el método no da información para el punto (x_0, y_0).

En $(x_0, y_0) = (0, 0)$, la función $z(x, y)$ no alcanza un extremo en $(0, 0)$, ya que al estudiar sus restricciones a $x = y$ y a $x = -y$, se obtiene que

$z(x, x) = 2x^4$ tiene un mínimo relativo en $x = 0$

$z(x, -x) = -8x^2 + 2x^4$ tiene un máximo relativo en $x = 0$

EXTREMOS RELATIVOS CONDICIONADOS

En lo que venimos diciendo hasta aquí, acerca de los extremos relativos de una función real $f: C \to \mathbb{R}$ (donde $C \subset \mathbb{R}^p$ es un abierto), $\boldsymbol{x} \mapsto f(\boldsymbol{x})$, a las p variables $x_1, x_2, ..., x_p$ (las p componentes de $\boldsymbol{x}$) no se las ha impuesto ninguna ligadura. Dicho de otro modo, las p variables se han podido mover libremente en un conjunto (el C) en el que hay p «grados de libertad»; a dichas p variables no se las ha obligado a satisfacer ninguna relación, no había ataduras entre ellas.