Cálculo en Varias Variables

Auxiliar 14 - Primavera 2010

Prof: Marcelo Leseigneur

Aux: Sebastián Bustamante F. & Víctor Verdugo S.

P1. La función de entropía $H(x) = -\sum_{i=1}^n x_i \log(x_i)$, definida para $x_i > 0$, tiene diversas aplicaciones en ingeniería, que van desde la codificación de mensajes hasta la compresión de datos. En la Teoría de la Información la función entropía representa una medida de incertidumbre asociada a una distribución de probabilidad $x = (x_i)_{i=1}^n$ de un mensaje emitido, es decir, la probabilidad de que un mensaje m sea igual a $i \in \{1, \dots, n\}$ es x_i (i.e. $\mathbb{P}(m = i) = x_i$). Así, entre mayor sea el valor de $H(x)$ mayor será la incertidumbre asociada a la distribución x .

- (i) Estudie el máximo de la función de entropía en su dominio. Justifique que efectivamente se obtiene un máximo. Si ahora se redefine H para $x_i \geq 0$ considerando su comportamiento límite en 0 dado por $0 \log(0) = 0$, verifique que el máximo sigue siendo el mismo.
- (ii) Muestre que la distribución de probabilidad que tiene máxima incertidumbre viene dada por $x_i = \frac{1}{n} \forall i = 1, \dots, n$.

P2. Calcular la distancia mínima del punto $(0, b)$ a la parábola $x^2 - 4y = 0$.

P3. Considere la función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = (x_1 x_2 \cdots x_n)^2.$$

Sea $S = \partial B(0, 1) \subset \mathbb{R}^n$, es decir,

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1\}.$$

- (i) Demuestre que f restringida a S , es decir, $f|_S$, alcanza su mínimo y su máximo.
- (ii) Usando multiplicadores de Lagrange, encuentre los puntos S donde se alcanza el máximo para $f|_S$. Justifique por qué son máximos.
- (iii) De lo anterior deduzca que si $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ entonces

$$(x_1 x_2 \cdots x_n)^2 \leq \frac{1}{n^n} (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)^n.$$

- (iv) Con los resultados anteriores, pruebe que si $a_1, a_2, \dots, a_n$ son reales no negativos, entonces

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}.$$

P4. (i) Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua que satisface

$$\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} f(x) = 0$$

y $f(x_0) > 0$ para algún $x_0 \in \mathbb{R}^2$. Pruebe que f posee un máximo global.

- (ii) Sea $f(x, y) = (ax^2 + by^2)e^{-(x^2+y^2)}$, con $a, b > 0$. Calcule máximos y mínimos globales. Para esto, analice los casos $a = b, a > b$ y $a < b$.