MA2001-1 Cálculo en Varias Variables. Semestre 2010-2
Profesor: Marcelo Leseigneur **Auxiliares:** Sebastián Bustamante y Víctor Verdugo

Auxiliar 12

Martes 26 de Octubre de 2010

P1. Sea $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Sea $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$x_0 \in \Sigma_c(\phi) = \{x \in \mathbb{R}^n : \phi(x) = c\}$$

Este conjunto se conoce como la superficie de nivel c de ϕ. Muestre que $\nabla\phi(x_0)$ es normal a $\Sigma_c(\phi)$ en x_0, y deduzca que la ecuación del plano tangente a $\Sigma_c(\phi)$ en x_0 es

$$\langle \nabla\phi(x_0), x - x_0 \rangle = 0$$

Además, usando lo anterior, encuentre el plano tangente a la superficie $x^4 + y^4 + z^4 = 3$, en el punto $(1, 1, 1)$.

P2. Encuentre las funciones $f : \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^1$ tal que

$$x\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) - y\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = k \cdot f(x, y)$$

con $k \in \mathbb{R}$.

P3. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función definida por:

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y^2}{x^4 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

a) Estudie la continuidad de f en $\mathbb{R}^2$.

b) Calcule las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$, en caso de existir.

c) Estudie la diferenciabilidad de f en $\mathbb{R}^2$.

d) Encuentre la matriz jacobiana de f en $(1, 1)$.

e) Encuentre la ecuación del plano tangente al grafo de f en $(1, 1, f(1, 1))$.

P4. Muestre que el siguiente sistema admite una única solución en $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{4}\,\mathrm{sen}(x + y) \\ y &= 1 + \frac{2}{3}\arctan(x - y) \end{aligned}$$