Pauta Control 2

MA2001-1

Prof: Marcelo Leseigneur
Auxs: Sebastián Bustamante y Víctor Verdugo

P1 a) $\|f(x)-f(y)\| = \|x+g(x)-(y+g(y))\|$

$$= \|x-y-(g(y)-g(x))\| \quad \downarrow \text{triangular}$$

$$\geq \|x-y\| - \|g(x)-g(y)\| \quad \downarrow \text{TVM}$$

$$\geq \|x-y\| - \sup_{z\in[x,y]} \|Dg(z)\| \, \|x-y\|$$

$$\geq \|x-y\| - K\|x-y\|$$

$$= (1-K)\|x-y\|$$

b) Sea $f(x) = f(y)$

$\Rightarrow \quad 0 = \|f(x)-f(y)\| \geq (1-K)\|x-y\| \geq 0 \quad (K\in(0,1))$

$\Rightarrow \quad (1-K)\|x-y\| = 0$

$\Rightarrow \quad \|x-y\| = 0$

$\Rightarrow \quad x = y \quad \therefore \ f$ es inyectiva

Además:

$$\|f(x)\| + \|f(y)\| \geq \|f(x)-f(y)\| \geq (1-K)\|x-y\|$$
$$\geq (1-K)\|x\| - (1-K)\|y\|$$

$$\Rightarrow \quad \|f(x)\| \geq \underbrace{(1-K)\|x\| - (1-K)\|y\| - \|f(y)\|}_{\|x\|\to\infty \ \Rightarrow \ +\infty}$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{\|x\| \to \infty} \|f(x)\| = +\infty$$

c) La función x y $g(x)$ son diferenciables y por lo tanto $f = id + g$ también lo es.
Además:

$$
\begin{aligned}
& \langle Df(x)h, h \rangle \\
&= \langle D(x+g(x))h, h \rangle \\
&= \langle Dxh + Dg(x)h, h \rangle \\
&= \langle h + Dg(x)h, h \rangle \\
&= \langle h, h \rangle + \langle Dg(x)h, h \rangle \\
&= \|h\|^2 + \langle Dg(x)h, h \rangle \quad \downarrow \text{C-S} \\
&\geq \|h\|^2 - \|Dg(x)h\| \|h\| \quad \downarrow Dg(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \\
&\geq \|h\|^2 - \|Dg(x)\| \|h\|^2 \\
&\geq \|h\|^2 - K\|h\|^2 \\
&= (1-K)\|h\|^2 .
\end{aligned}
$$

d) La función μ es diferenciable pues se escribe como composición de diferenciables:

$$x \xmapsto{g_1} f(x) - y$$

$$f(x) - y \xmapsto{g_2} (f(x)-y, f(x)-y)$$

$$(f(x)-y, f(x)-y) \xmapsto{g_3} \langle f(x)-y, f(x)-y \rangle = \|f(x)-y\|^2$$

las cuales son todos diferenciables, pues f es diferenciable, la identidad y el producto interno también.

$$\Rightarrow \quad \mu(x) = (g_3 \circ g_2 \circ g_1)(x)$$

$$\Rightarrow \quad D\mu(x)h = Dg_3(g_2 \circ g_1)(x)\, Dg_2(g_1(x))\, Dg_1(x)\, h$$

$$= Dg_3(g_2 \circ g_1)(x)\, Dg_2(g_1(x))\, Df(x)\, h$$

$$= Dg_3(f(x)-y, f(x)-y)\,(Df(x)h, Df(x)h)$$

$$= 2\langle f(x)-y, Df(x)h\rangle.$$

e) Consideremos $h(x) = \mu(x) = \|f(x)-y\|^2$. Probemos que satisface el límite requerido (la continuidad es gratis de la diferenciabilidad, o bien, por ser composición de continuas)

$$\|f(x)-y\|^2 = \|f(x)\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle f(x), y\rangle \quad \downarrow \text{C-S}$$

$$\geq \|f(x)\|^2 + \|y\|^2 - 2\|f \quad \|\,\|y\|$$

$$= \|f(x)\|\,(\|f(x)\| - 2\|y\|) + \|y\|^2$$

$$\downarrow \|x\| \to +\infty \quad (\text{por parte b}))$$

$$+\infty$$

$$\therefore \lim_{\|x\| \to +\infty} \mu(x) = +\infty$$ y ocupando la indicación,

$\exists\, x_0 \in \mathbb{R}^n$ tal que $\mu(x_0) = \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \mu(x)$.

f) Puesto que $\mu(x_0) = \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \mu(x)$ y μ es diferenciable, tenemos que:

$$D\mu(x_0)h = 2\langle f(x_0) - y, Df(x_0)h \rangle = 0 \quad , \forall h \in \mathbb{R}^n$$

En particular, podemos evaluar en $h = f(x_0) - y$:

$$\langle f(x_0) - y, Df(x_0)(f(x_0) - y) \rangle = 0$$

y por parte c), tenemos que:

$$\begin{aligned} 0 &= \langle f(x_0) - y, Df(x_0)(f(x_0) - y) \rangle \\ &\geq (1-K) \| f(x_0) - y \|^2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad (1-K)\|f(x_0) - y\|^2 = 0 \qquad (K \in (0,1))$$

$$\Rightarrow \quad \|f(x_0) - y\|^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad f(x_0) = y \quad (*)$$

Dado que $y \in \mathbb{R}^n$ es cualquiera, $(*)$ asegura la existencia de una preimagen mediante f para y, es decir, f es sobreyectiva. Sumado a que en b) probamos la inyectividad, se concluye que f es biyectiva.

P2| i)

a) En $\mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$ la continuidad es consecuencia de la continuidad de los polinomios. Estudiemos el comportamiento en el origen:

$$\left| \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} \right| \xrightarrow[\text{polares}]{} = \frac{\rho^2 |\cos\theta \operatorname{sen}\theta| \rho^2 (\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta)}{\rho^2}$$

$$= \rho^2 |\cos\theta \operatorname{sen}\theta| (\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta) \xrightarrow{\rho \to 0} 0$$

$\therefore$ f es continua en $(0,0)$.

b) En $\mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$ la función es diferenciable, y por lo tanto, derivable parcialmente:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y(x^4+4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2}$$

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x(x^4-4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0)}{t} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t) - f(0,0)}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t)}{t} = 0$$

Veamos la continuidad de $\frac{\partial f}{\partial x}$ en el origen:
(para $\frac{\partial f}{\partial y}$ es análogo)

$$\left| \frac{y(x^4+4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2} \right| = \frac{\cancel{\rho^5}\,|\cos^4\theta + 4\cos^2\theta\,\mathrm{sen}^2\theta - \mathrm{sen}^4\theta|}{\cancel{\rho^4}}$$

$$= \rho\,|\cos^4\theta + 4\cos^2\theta\,\mathrm{sen}^2\theta - \mathrm{sen}^4\theta| \xrightarrow{\rho\to 0} 0$$

$\therefore$ $\frac{\partial f}{\partial x}$ es continua en $(0,0)$. De igual forma se prueba que $\frac{\partial f}{\partial y}$ es continua en el origen $(0,0)$.

c) $\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,y)-f(0,y)}{t}$

$= \lim_{t\to 0} \frac{\cancel{t}y(t^2-y^2)}{t^2+y^2} \cdot \frac{1}{\cancel{t}}$

$= y \cdot \frac{-y^2}{y^2}$

$= -y \quad , \forall y \in \mathbb{R}$

d) $\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x,t)-f(x,0)}{t}$

$= \lim_{t\to 0} \frac{x\cancel{t}(x^2-t^2)}{x^2+t^2} \cdot \frac{1}{\cancel{t}}$

$= x \cdot \frac{x^2}{x^2}$

$= x \quad , \forall x \in \mathbb{R}.$

e) Calculemos las cruzadas:

$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,t) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{t}$ por parte c)

$= \lim_{t\to 0} \frac{-t-0}{t} = -1$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(t,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{t - 0}{t} = 1$$

$\therefore \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, y por lo tanto f no es de clase C^2.

Pauta P2. iii)

a) - $F(x_1,x_2,y)$ es $\mathcal{C}^1$ por composición, suma y multiplicación de funciones $\mathcal{C}^1$.

- $F(1,1,1) = 0$
- $\frac{\partial F}{\partial y}(x_1,x_2,y) = \arctan(1-y^2) - \frac{2y^2}{1+(1-y^2)^2} + 5 \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial y}(1,1,1) = 3$

$\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial y}(1,1,1)$ es invertible.

$\therefore$ Se satisfacen las condiciones del T.F. Imp.

Además,

$$Jg(1,1) = \left[\frac{\partial y}{\partial x_1}(1,1) \quad \frac{\partial y}{\partial x_2}(1,1)\right] = -\left[D_y F(1,1,1)\right]^{-1} \circ D_x F(1,1,1)$$

$$= -\frac{1}{3}\cdot\left[\frac{\partial F}{\partial x_1}(1,1,1) \quad \frac{\partial F}{\partial x_2}(1,1,1)\right]$$

$$= -\frac{1}{3}\left[3 \quad -24\right] = \left[-1 \quad 8\right]$$

$\therefore \frac{\partial y}{\partial x_1}(1,1) = -1$, $\frac{\partial y}{\partial x_2} = 8$.

b) - $f(u,v,w,x,y)$ es $\mathcal{C}^1$ pues sus componentes lo son.

- $f(u_0,v_0,w_0,x,y) = \begin{pmatrix} 6+x+y+2 \\ x-2y+9 \end{pmatrix} = \vec{0} \iff x = -\frac{25}{3} \wedge y = \frac{1}{3}$

- $f_{x,y}(\underbrace{u_0,v_0,w_0,-\tfrac{25}{3},\tfrac{1}{3}}_{\%}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(\%) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(\%) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(\%) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(\%) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$, cuyo determinante es $-3 \neq 0$, por lo que es invertible.

$\therefore$ Se puede despejar (x,y) en términos de (u,v,w) en torno a (u_0,v_0,w_0).

Además,

$$Jg(1,2,3) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \end{bmatrix}(1,2,3) = -\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}^{-1}\cdot\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} & \frac{\partial f_1}{\partial v} & \frac{\partial f_1}{\partial w} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} & \frac{\partial f_2}{\partial v} & \frac{\partial f_2}{\partial w} \end{bmatrix}(\%)$$

$$= \begin{bmatrix} \cdot & -17/9 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 4/3 \end{bmatrix}$$

$\therefore \frac{\partial x}{\partial v}(1,2,3) = -17/9 \wedge \frac{\partial y}{\partial w}(1,2,3) = 4/3$

P3 a) $f(x,y) = g(\phi(x,y)) = g(x+y,\, x-y)$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial \mu}\cdot\frac{\partial \mu}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$= \frac{\partial g}{\partial \mu} + \frac{\partial g}{\partial v}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial \mu}\cdot\frac{\partial \mu}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$= \frac{\partial g}{\partial \mu} - \frac{\partial g}{\partial v}$$

b) $$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial g}{\partial \mu} + \frac{\partial g}{\partial v}\right)$$

$$= \left(\frac{\partial^2 g}{\partial \mu^2}\frac{\partial \mu}{\partial x} + \frac{\partial^2 g}{\partial v\partial \mu}\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial^2 g}{\partial \mu\partial v}\frac{\partial \mu}{\partial x} + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

$$= \frac{\partial^2 g}{\partial \mu^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial v\partial \mu} + \frac{\partial^2 g}{\partial \mu\partial v} + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}$$

$$= \frac{\partial^2 g}{\partial \mu^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} + 2\frac{\partial^2 g}{\partial \mu\partial v}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial g}{\partial \mu} - \frac{\partial g}{\partial v}\right)$$

$$= \frac{\partial^2 g}{\partial \mu^2}\frac{\partial \mu}{\partial y} + \frac{\partial^2 g}{\partial v \partial \mu}\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$- \left(\frac{\partial^2 g}{\partial \mu \partial v}\frac{\partial \mu}{\partial y} + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

$$= \frac{\partial^2 g}{\partial \mu^2} - \frac{\partial^2 g}{\partial v \partial \mu} - \left(\frac{\partial^2 g}{\partial \mu \partial v} - \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}\right)$$

$$= \frac{\partial^2 g}{\partial \mu^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} - 2\frac{\partial^2 g}{\partial \mu \partial v}$$

c) $$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

$$= \left(\frac{\partial^2 g}{\partial \mu^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} + 2\frac{\partial^2 g}{\partial \mu \partial v}\right) - \left(\frac{\partial^2 g}{\partial \mu^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} - 2\frac{\partial^2 g}{\partial \mu \partial v}\right)$$

$$= 4\frac{\partial^2 g}{\partial \mu \partial v} = 0 \quad (\text{por } (1))$$

d) $$\frac{\partial^2 g}{\partial \mu \partial v} = 0 \Rightarrow g(\mu, v) = \xi(\mu) + \varphi(v)$$

con ξ, φ funciones de clase C^2.

$$\Rightarrow \quad f(x,y) = \xi(x+y) + \varphi(x-y)$$

e) Consideremos $\xi(x) = \varphi(x) = e^x$, entonces una solución a (1) es:

$$f(x,y) = e^{x+y} + e^{x-y}$$

Puntajes en cada parte

P1
- a) 1 pto
- b) 1 pto
- c) 1 pto
- d) 1 pto
- e) 1 pto
- f) 1 pto.

P2
- i)
  - a) 0,5 ptos
  - b) 0,5 ptos
  - c) 0,5 ptos
  - d) 0,5 ptos
  - e) 0,5 ptos
- ii) 1,5 ptos
- iii) 2 ptos.

P3
- a) 1,2 ptos
- b) 1,2 ptos
- c) 1,2 ptos
- d) 1,2 ptos
- e) 1,2 ptos.