Cálculo en Varias Variables
Auxiliar 11 - Primavera 2010

Prof: Marcelo Leseigneur
Aux: Sebastián Bustamante F. & Víctor Verdugo S.

Teorema de la Función Implícita: Sea $F : A \subseteq \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}^n$ una función de clase C^1 y sea $(x_0, y_0) \in A$ un punto tal que

1. $F(x_0, y_0) = 0$,
2. $F_y(x_0, y_0)$ es invertible.

Entonces existen vecindades U y W de (x_0, y_0) y x_0, respectivamente, y una única función $g : W \to \mathbb{R}^n$ de clase C^1 tal que

1. $F(x, g(x)) = 0$ para todo $x \in W$,
2. $g(x_0) = y_0$, y

$$Dg(x_0) = -[D_y F(x_0, y_0)]^{-1} \circ D_x F(x_0, y_0) \quad \text{o bien} \quad J(g, x_0) = -[F_y(x_0, y_0)]^{-1} F_x(x_0, y_0),$$

donde $[F_x(x_0, y_0) | F_y(x_0, y_0)] = J(F, (x_0, y_0))$.

P1. Considere la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - y^2 \arctan\left(\frac{x}{y}\right) & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

i) Calcule $f(x, 0)$ y $f(0, y)$ para $x \neq 0, y \neq 0$.

ii) Para $(x, y) \neq (0, 0)$ determine $\nabla f(x, y)$ y $H_f(x, y)$. ¿Es $H_f(x, y)$ una matriz simétrica?

iii) ¿Se cumple que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$? Justifique.

iv) Encuentre el polinomio de Taylor de orden 2 en torno a $(0, 0)$.

P2. Sean $g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funciones de clase $C^1(\mathbb{R}^n)$, para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. Suponga además que

$$\max\{\|\nabla g_i(x)\|_\infty : x \in \mathbb{R}^n\} < \frac{1}{2n} \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\}.$$

Pruebe que el siguiente sistema

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & g_1(x) \\ x_2 & = & g_2(x) \\ & \vdots & \\ x_n & = & g_n(x) \end{array}$$

posee una única solución en $\mathbb{R}^n$, donde $x = (x_1, \ldots, x_n)$.

P3. Se considera el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{array}{rcl} 3x + 2y + z^2 + u + v^2 & = & 0 \\ 4x + 3y + z + u^2 + v + w + 2 & = & 0 \\ x + z + w + u^2 + 2 & = & 0 \end{array}$$

i) Mostrar que es posible despejar u, v y w en función de x, y, z en una vecindad del punto $(x, y, z, u, v, w) = (0, 0, 0, 0, 0, -2)$.

ii) Calcular $\dfrac{\partial u}{\partial x}(0,0,0), \dfrac{\partial v}{\partial x}(0,0,0), \dfrac{\partial w}{\partial x}(0,0,0)$.

Pauta Aux 11
Cálculo en Varias Variables

P1 i) Probaremos que $f(x,0)=\lim_{y\to 0} f(x,y)$ y $f(0,y)=\lim_{x\to 0} f(x,y)$ existen. En efecto, cuando $(x,y)\neq(0,0)$, tenemos que

$$0\le |f(x,y)|\le \left|x^2\arctan\left(\frac{y}{x}\right)-y^2\arctan\left(\frac{x}{y}\right)\right|$$

$$\le x^2\left|\arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right|+y^2\left|\arctan\left(\frac{x}{y}\right)\right| \qquad (*)$$

- Cuando $y\to 0$, $(*)\longrightarrow x^2\cdot 0+0\cdot\frac{\pi}{2}=0$. Luego, $f(x,0)=\lim_{y\to 0} f(x,y)=0$.

- Cuando $x\to 0$, $(*)\longrightarrow 0\cdot\frac{\pi}{2}+y^2\cdot 0=0$. Luego, $f(0,y)=\lim_{x\to 0} f(x,y)=0$.

ii) • $\nabla f(x,y)=\left(2x\arctan\left(\frac{y}{x}\right)-y,\ x-2y\arctan\left(\frac{x}{y}\right)\right)$

• $$H_f(x,y)=\begin{pmatrix} 2\arctan\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{2xy}{x^2+y^2} & \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \\ \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \frac{2xy}{x^2+y^2}-2\arctan\left(\frac{x}{y}\right)\end{pmatrix}$$

$\therefore H_f(x,y)$ es simétrica.

iii) Antes de calcular las derivadas cruzadas, veamos que:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)&=\lim_{t\to 0}\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{0-0}{t}=0\\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)&=\lim_{t\to 0}\frac{f(0,t)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{0-0}{t}=0.\end{aligned}\right\}\text{ Por parte i).}$$

Cuando $t\neq 0$, se tiene que:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,t)=\lim_{h\to 0}\left[2h\arctan\left(\frac{t}{h}\right)-t\right]=-t$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(t,0)=\lim_{h\to 0}\left[t-2h\arctan\left(\frac{t}{h}\right)\right]=t$$

Ahora, calculemos las derivadas cruzadas:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(t,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t-0}{t} = 1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,t) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{-t-0}{t} = -1.$$

$$\therefore \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0).$$

iv) El polinomio de Taylor de orden 2 está dado por

$$p(h) = f(0,0) + \langle \nabla f(0,0), h \rangle + \frac{1}{2} h^t H_f(0,0) h$$
$$= 0 + \langle 0, h \rangle + \frac{1}{2} h^t H_f(0,0) h = \frac{1}{2} h^t H_f(0,0) h.$$

Calculemos $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)$. Antes, veamos que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(t,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(t+h,0) - f(t,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,t) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,t+h) - f(0,t)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0$$

Luego,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(t,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0-0}{t} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(0,t) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0-0}{t} = 0.$$

Con lo que finalmente el polinomio p es:

$$p(h) = \frac{1}{2} h^t H_f(0,0) h = \frac{1}{2} (h_1 \;\; h_2) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{2} (h_1 \;\; h_2) \begin{pmatrix} -h_2 \\ h_1 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{2} (-h_1 h_2 + h_2 h_1) = 0$$

■

P2 Consideremos la función $G:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ dada por $G(x) = (g_1(x), \dots, g_n(x))$. Esta función es de clase $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$, pues sus componentes lo son. Dado que $\mathbb{R}^n$ es convexo, el Teorema del Valor Medio asegura que

$$\| G(b) - G(a) \|_1 \leq \sup_{x \in]a,b[} \| DG_x \|_{\mathcal{L}} \| b - a \|_1$$

para todo $a, b \in \mathbb{R}^n$, con $]a,b[= \{ a(1-t) + bt : t \in (0,1) \}$ y $\| DG_x \|_{\mathcal{L}} = \sup_{h \in \mathbb{R}^n} \frac{\| DG_x(h) \|_1}{\| h \|_1}$. Por otro lado,

$$\| DG_x(h) \|_1 = \| J_G(x) h \|_1 = \sum_{i=1}^n | \langle \nabla g_i(x), h \rangle | \leq \sum_{i=1}^n \| \nabla g_i(x) \|_\infty \| h \|_1$$
$$< \sum_{i=1}^n \frac{1}{2n} \| h \|_1 = \frac{1}{2} \| h \|_1$$

lo que nos permite establecer que

$$\| DG_x \|_{\mathcal{L}} = \sup_{h \in \mathbb{R}^n} \frac{\| DG_x(h) \|_1}{\| h \|_1} \leq \sup_{h \in \mathbb{R}^n} \frac{\frac{1}{2} \| h \|_1}{\| h \|_1} = \frac{1}{2},$$

para todo $x \in]a,b[$, y por lo tanto $\sup_{x \in]a,b[} \| DG_x \|_{\mathcal{L}} < \frac{1}{2}$. De esto obtenemos que

$$\| G(b) - G(a) \|_1 \leq \frac{1}{2} \| b - a \|_1$$

para todo $a, b \in \mathbb{R}^n$ y por lo tanto G es contractante. Dado que $(\mathbb{R}^n, \| \cdot \|_1)$ es un espacio de Banach y $\mathbb{R}^n$ es cerrado, el Teorema del Punto Fijo de Banach nos permite concluir que existe un único $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $G(x) = x$, es decir, que el sistema

$$\begin{aligned} x_1 &= g_1(x) \\ x_2 &= g_2(x) \\ &\vdots \\ x_n &= g_n(x) \end{aligned}$$

posee una única solución en $\mathbb{R}^n$, donde $x = (x_1, \dots, x_n)$.

P3 i) Sea $F: \mathbb{R}^6 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$F(x,y,z,u,v,w) = \begin{pmatrix} 3x+2y+z^2+u+v^2 \\ 4x+3y+z+u^2+v+w+2 \\ x+z+w+u^2+2 \end{pmatrix}$$

F es de clase C^1 pues sus funciones coordenada lo son, y $F(0,0,0,0,0,-2) = 0$. Además

$$D_{u,v,w}F = \begin{pmatrix} 1 & 2v & 0 \\ 2u & 1 & 1 \\ 2u & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad y \quad \det(D_{u,v,w}F(0,0,-2)) = \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = -1$$

$\Rightarrow D_{u,v,w}F(0,0,-2)$ es invertible.

Luego, por el teorema de la función implícita se puede despejar u,v,w en función de x,y,z en una vecindad V de $(0,0,0)$.

ii) En una vecindad de $(0,0,0)$ se puede escribir el sistema como

$$\begin{aligned} &3x+2y+z^2+u(x,y,z)+v^2(x,y,z) = 0 \\ &4x+3y+z+u^2(x,y,z)+v(x,y,z)+w(x,y,z)+2 = 0 \\ &x+z+w(x,y,z)+u^2(x,y,z)+2 = 0 \end{aligned}$$

Derivando cada ecuación con respecto a x obtenemos:

$$\begin{aligned} &3+\frac{\partial u}{\partial x}(x,y,z)+2v(x,y,z)\frac{\partial v}{\partial x}(x,y,z) = 0 \\ &4+2u(x,y,z)\frac{\partial u}{\partial x}(x,y,z)+\frac{\partial v}{\partial x}(x,y,z)+\frac{\partial w}{\partial x}(x,y,z) = 0 \\ &1+\frac{\partial w}{\partial x}(x,y,z)+2u(x,y,z)\frac{\partial u}{\partial x}(x,y,z) = 0 \end{aligned}$$

En $(x,y,z) = (0,0,0)$ tenemos $u(x,y,z) = v(x,y,z) = 0$ y $w(x,y,z) = -2$.

Así, evaluando en el sistema, obtenemos

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,0,0) = -3, \quad \frac{\partial w}{\partial x}(0,0,0) = -1, \quad \frac{\partial v}{\partial x}(0,0,0) = -3$$