Teoremas de la función implícita y de la función inversa

1. El teorema de la función implícita

1.1. Ejemplos preliminares

El teorema de la función implícita aborda la cuestión general de la dependencia entre variables ligadas por una ecuación, que ahora vamos a describir informalmente en el caso de dos variables: supongamos que tenemos una relación entre las variables x e y, que podemos escribir en la forma de una ecuación:

$$F(x, y) = 0$$

donde $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una función escalar. Entonces, fijado un valor x_0, al sustituirlo en esa relación obtenemos una ecuación para y. Resolviendo esta ecuación cuando esto sea posible, obtenemos un valor (o quizá varios valores) y_0, que dependen del valor x_0 que hemos fijado arbitrariamente al principio. De esa forma se establece una dependencia en la que, a cada valor x_0, le corresponde un valor y_0: la variable y depende de x. Por tanto podemos pensar que la ecuación determina una función $y(x)$, que se obtiene "despejando y" como función de x:

$$F(x, y) = 0 \to y = f(x)$$

Ejemplo 1. *La ecuación $3x - 2y = 4$ se puede escribir en la forma $F(x, y) = 0$, usando una función :*

$$F(x, y) = 3x - 2y - 4$$

En cualquier caso esta ecuación permite despejar:

$$y(x) = \frac{3x - 4}{2}$$

En este caso es muy fácil obtener la relación entre x e y. Supongamos ahora que nos dan la ecuación:

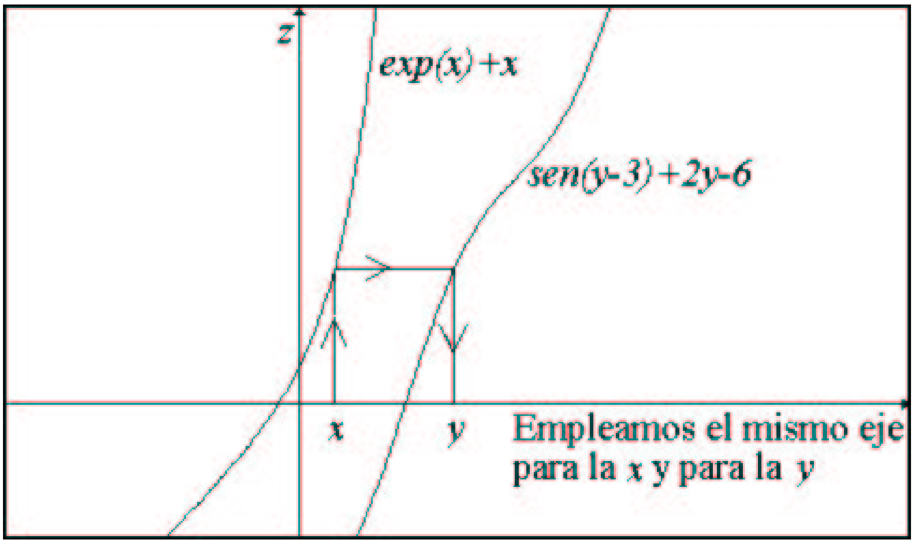
$$e^x + x = \operatorname{sen}(y - 3) + 2y - 6$$

De nuevo esta ecuación es de la forma $F(x, y) = 0$ para

$$F(x, y) = e^x + x - \operatorname{sen}(y - 3) - 2y + 6$$

Como muestran ambos ejemplos, la forma $F(x, y) = 0$ es completamente general, y no limita el tipo de ecuaciones que podemos considerar.

Seguramente, en el segundo ejemplo el lector no está ya tan dispuesto a intentar despejar y como función de x. Es más, puede que incluso se plantee la duda de si existe la solución y sea cual sea el valor de x. Podemos despejar esa duda con esta figura



en la que hemos representado las curvas $z = e^x + x$ y $z = \operatorname{sen}(y-3)+2y-6$. Como puede verse, la correspondencia $z \to x$ es biyectiva, y lo mismo sucede con la correspondencia $y \to z$. Por lo tanto, para cada x hay un valor de y y sólo uno: queda definida una función $y(x)$. ¿Es creciente esta función? ¿Es derivable? ¿Cuáles son sus máximos y mínimos? Ese es el tipo de preguntas que pretendemos aprender a resolver.

Como muestra el ejemplo, las funciones $y(x)$ que estamos buscando no vienen dadas por una fórmula **explícita** que nos indique directamente las operaciones que debemos realizar con x para obtener el valor de y. Por eso empleamos el nombre "función implícita" para referirnos a una de estas funciones. Antes de dar la definición, profundicemos un poco en el ejemplo anterior.

Ejemplo 2. *(continuación del anterior) Sea $y(x)$ la función implícita definida por la ecuación*

$$e^x + x - \operatorname{sen}(y-3) - 2y + 6 = 0$$

del ejemplo anterior. Entonces, naturalmente, sea cual sea x, debe cumplirse:

$$e^x + x - \operatorname{sen}(y(x)-3) - 2y(x) + 6 = 0$$

Si usamos la función

$$F(x,y) = e^x + x - \operatorname{sen}(y-3) - 2y + 6$$

Entonces esto se traduce en que ha de ser:

$$F(x, y(x)) = 0$$

Obsérvese que $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una función de clase C^∞. Pues bien, no sabemos todavía nada sobre la función $y(x)$. Pero supongamos que $y(x)$ resulta ser una función derivable. Entonces, si consideramos la función compuesta $h(x) = F(x, y(x))$, sería una función derivable (regla de la cadena). Por otro lado, la expresión anterior asegura que esta función $h(x)$ es la función constante 0. Su derivada por lo tanto es cero; y según la regla de la cadena obtenemos:

$$0 = \frac{dh}{dx} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx}$$

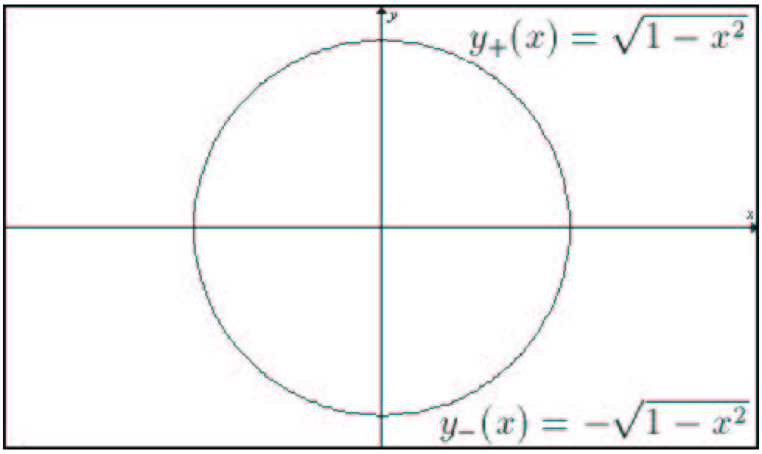
El descubrimiento que hemos hecho es que podemos despejar:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}} = -\frac{e^x + 1}{\cos(y-3) - 2}$$

siempre que sea $\dfrac{\partial F}{\partial y} = \cos(y-3) - 2 \neq 0$ *(lo cual sucede siempre ¿verdad?). O sea, que aunque no sabemos escribir una expresión explícita para* $y(x)$*, sí podemos calcular su derivada en un punto* $(x_0, y(x_0))$ *dado. De esa forma podremos aprovecharnos de toda la información que la derivada proporciona sobre* $y(x)$*. (De hecho, es posible calcular derivadas de orden más alto, y de esa forma escribir polinomios de Taylor para* $y(x)$*, con lo que tenemos una forma de resolver –al menos aproximadamente– la ecuación.)*

Este ejemplo nos muestra la cara optimista, las buenas noticias sobre el problema que estamos intentando resolver. Pero no siempre va a funcionar todo tan bien. Veamos otro ejemplo sencillo.

Ejemplo 3. *¿Cuántas funciones* $y(x)$ *define la ecuación* $x^2 + y^2 = 1$*? Hagamos un dibujo:*



Como puede verse en este dibujo, o "despejando" en la fórmula, en cada punto del intervalo $[-1, 1]$ *quedan definidas dos funciones por la ecuación. Esas funciones son:*

$$\begin{cases} y_+(x) = \sqrt{1-x^2} \\[2ex] y_-(x) = -\sqrt{1-x^2} \end{cases}$$

Si en un problema aparece esta ecuación y necesitamos emplear una de esas funciones debemos escoger entre ellas. Para ello podemos fijar cual es la imagen del punto. Por ejemplo, si en nuestro problema sabemos[1] *que ha de ser* $y(0) = 1$*, entonces sólo hay una de estas dos funciones que toma el valor 1 en 0. La función*

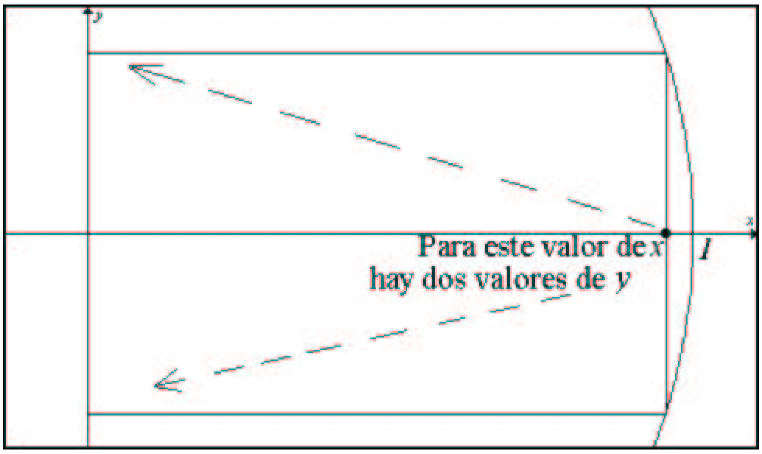
$$y_+(x) = \sqrt{1-x^2}$$

[1]Por ejemplo, a través de la condición inicial de un problema de Cauchy para una ecuación diferencial

definida, por ejemplo, en el intervalo de los valores $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ *del eje* x*, proporciona para cada* x *de ese intervalo una solución* y *de* $x^2 + y^2 = 1$*. Lo mismo puede decirse de*

$$y_-(x) = -\sqrt{1 - x^2}$$

Además como puede verse, esas funciones son diferenciables salvo en los puntos $x = 1, x = -1$ *(en los que la tangente es vertical). Por otra parte, es evidente que en esos puntos la ecuación no permite determinar un valor de* y *para cada valor de* x*, porque si* x *es menor que 1 y está cerca de* $x = 1$*, como muestra la siguiente figura:*



no hay una única solución y*. (Y por otra parte si* $x > 1$ *no hay ninguna solución.) No hay ninguna esperanza de que sea posible definir* $y(x)$ *en un entorno abierto de* $x = 1$*, y que ese valor* $y(x)$ *nos proporcione una solución única de* $x^2 + y^2 = 1$ *en ese entorno.*

Si utilizamos la misma idea que en el ejemplo anterior, haríamos $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ *con lo que:*

$$h(x) = F(x, y(x)) = x^2 + (y(x))^2 - 1 = 0$$

Y derivando:

$$h'(x) = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y'(x) = 0$$

De donde se obtiene:

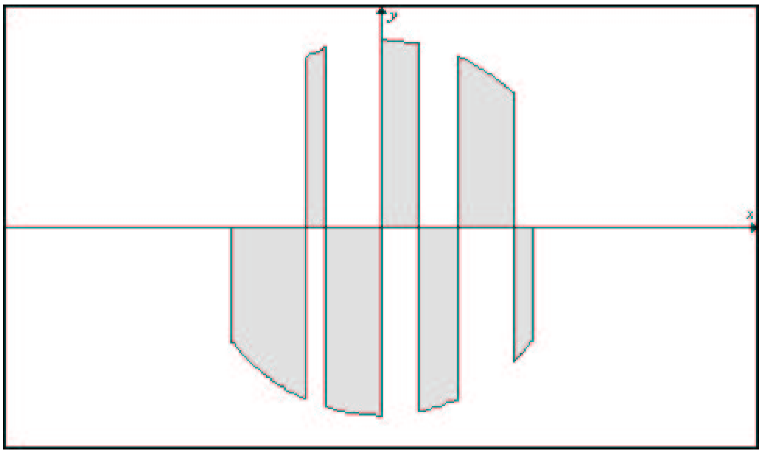
$$y'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = -\frac{x}{y}$$

Como se ve, esta fórmula sólo presenta problemas en aquellas soluciones (x, y) *de* $x^2 + y^2 = 1$ *en las que sea* $y = 0$*. Es decir, precisamente en los puntos* $(1, 0)$ *y* $(-1, 0)$*, donde hemos visto que era imposible definir* $y(x)$ *de una forma satisfactoria.*

No queremos terminar este ejemplo sin señalar que hemos simplificado bastante al decir que la ecuación $x^2 + y^2 = 1$ *determina tan sólo dos funciones en un entorno de* $x = 0$*. Es posible construir muchas otras soluciones si decidimos emplear la fórmula de* y_+ *en algunos subintervalos, y la fórmula de* y_- *en otros subintervalos. De esa manera se obtienen infinitas posibles funciones* $y(x)$ *que cumplen*

$$x^2 + (y(x))^2 = 1$$

Por ejemplo, en esta figura representamos una de esas funciones, definida en el intervalo $(-0{,}8, 0{,}8)$*. Hemos sombreado ligeramente el área bajo la curva para ayudar a la vista:*



Es evidente sin embargo que esta función no es continua, y por tanto no es diferenciable. Sin embargo, si tomamos una bola suficientemente pequeña alrededor del punto $(0,1)$ *(teniendo en cuenta la coordenada* y*, no sólo la coordenada* $x = 1$*) y queremos obtener soluciones diferenciables de la ecuación* $x^2 + y^2 = 1$*, es evidente que todas las posibles soluciones contenidas en esa bola quedan correctamente descritas usando solamente* y_+*.*

Parece por tanto, a la luz de estos ejemplos, que la condición

$$\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$$

tiene que ver con la existencia de una función implícita que sea derivable. En el teorema que vamos a formular escribiremos una condición que, efectivamente, es una generalización natural de esta observación a problemas con n variables.

1.2. Funciones implícitas en n variables

Después de todas estas observaciones vamos a generalizar esto a funciones $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Esta generalización es necesaria para tratar con sistemas de ecuaciones como este:

$$\begin{cases} F_1(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = 0 \\ F_2(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = 0 \\ \quad\vdots \\ F_m(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = 0 \end{cases}$$

Nuestro problema aquí consiste en saber si es posible despejar las variables $(y_1, \ldots, y_m)$ en términos de las variables $x_1, \ldots, x_n$ para obtener una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ dada por:

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x_1, \ldots, x_n) \\ y_2 = f_2(x_1, \ldots, x_n) \\ \quad\vdots \\ y_m = f_m(x_1, \ldots, x_n) \end{cases} \quad \text{o, abusando de la notación} \quad \begin{cases} y_1 = y_1(x_1, \ldots, x_n) \\ y_2 = y_2(x_1, \ldots, x_n) \\ \quad\vdots \\ y_m = y_m(x_1, \ldots, x_n) \end{cases}$$

Observación.

1. El lector debe observar que, a pesar de que nosotros hemos diferenciado la letra de las variables que vamos a despejar de las que van a ser variables independientes, en un problema real esa distinción no se produce. Dada una ecuación:

$$F(x, y) = 0$$

muchas veces es igualmente posible despejar $y(x)$ o bien $x(y)$. Y de una ecuación como $F(x, y, z) = 0$ podemos intentar despejar $z = f(x, y)$ o también $y = g(x, z)$.

2. A partir de m ecuaciones vamos a intentar despejar m variables en función de las restantes variables. En general no es razonable esperar que sea posible obtener un número de funciones mayor que el número de ecuaciones disponibles, aunque esta no es una regla absoluta: la ecuación $(y - \operatorname{sen} x)^2 + (z - \cos x)^2 = 0$ define tanto a y como a z como funciones de x, de manera única.

1.3. Un ejemplo sencillo: funciones implícitas dadas por sistemas lineales.

El caso de los sistemas lineales proporciona un ejemplo sencillo en el que ensayar las ideas que volverán a aparecer en el teorema general. Supongamos pues dado un sistema:

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + \cdots + c_{1n}x_n + c_{1,n+1}y_1 + \cdots + c_{1,n+m}y_m = b_1 \\ c_{21}x_1 + \cdots + c_{2n}x_n + c_{2,n+1}y_1 + \cdots + c_{2,n+m}y_m = b_2 \\ \vdots \\ c_{m1}x_1 + \cdots + c_{mn}x_n + c_{m,n+1}y_1 + \cdots + c_{m,n+m}y_m = b_m \end{cases}$$

En el que $b_1, \ldots, b_m$ son números. Queremos saber cuándo es posible despejar las variables y_i en términos de las x_j. En el curso de álgebra lineal el lector debe haber aprendido que para que esto sea posible la submatriz de coeficientes formada por las columnas que ocupan las variables y_i ha de ser de rango m:

$$\begin{pmatrix} c_{1,n+1} & \cdots & c_{1,n+m} \\ c_{2,n+1} & \cdots & c_{2,n+m} \\ & \ddots & \\ c_{m,n+1} & \cdots & c_{m,n+m} \end{pmatrix}$$

Obsérvese que es una matriz cuadrada de orden m, y que ha de tener determinante no nulo. Para prepararnos para el teorema, y relacionar este resultado con los ejemplos anteriores, observemos que si hacemos:

$$F = (F_1, \ldots, F_m), \bar{x} = (x_1, \ldots, x_n), \bar{y} = (y_1, \ldots, y_m)$$

con:

$$F_i(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = c_{i1}x_1 + \cdots + c_{in}x_n + c_{i,n+1}y_1 + \cdots + c_{i,n+m}y_m - b_i$$

Entonces el sistema es equivalente a $F(x,y) = (0,\ldots,0)$. Y la condición para que se puedan despejar las y_i como función de las x_i es:

$$\begin{vmatrix} c_{1,n+1} & \cdots & c_{1,n+m} \\ c_{2,n+1} & \cdots & c_{2,n+m} \\ & \ddots & \\ c_{m,n+1} & \cdots & c_{m,n+m} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial y_m} \\ & \ddots & \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{vmatrix} = \det\left(\frac{\partial(F_1,\ldots,F_m)}{\partial(y_1,\ldots,y_m)}\right) \neq 0$$

La condición

$$\det\left(\frac{\partial(F_1,\ldots,F_m)}{\partial(y_1,\ldots,y_m)}\right) \neq 0$$

es el equivalente en este caso de la condición:

$$\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$$

que hemos obtenido en algunos de los ejemplos precedentes.

1.4. Definición de función implícita

Vamos finalmente a dar una definición de lo que entendemos por una solución del problema de despejar unas variables en función de otras, inspirándonos en la discusión anterior y en los ejemplos que hemos visto:

Supongamos dada una función $F = (F_1,\ldots,F_m) : U \subset \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^m$ en un abierto $U \subset \mathbb{R}^{n+m}$ mediante las relaciones:

$$\begin{cases} F_1(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_m) = 0 \\ \\ F_2(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_m) = 0 \\ \vdots \\ F_m(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_m) = 0 \end{cases}$$

Sea $(\bar{x}_0, \bar{y}_0)$ un punto de U (con $\bar{x}_0 \in \mathbb{R}^n, \bar{y}_0 \in \mathbb{R}^m$) tal que:

$$F(\bar{x}_0, \bar{y}_0) = 0$$

Definición 4. *Diremos entonces que la ecuación $F(\bar{x},\bar{y}) = 0$ define a $\bar{y} = (y_1,\ldots,y_m)$ como función implícita de $\bar{x} = (x_1,\ldots,x_n)$ si existe un entorno V de $\bar{x}_0$ en $\mathbb{R}^n$ y un entorno W de $\bar{y}_0$ en $\mathbb{R}^m$ junto con una aplicación $f : V \to W$ dada por:*

$$f(x_1,\ldots,x_n) = (f_1(x_1,\ldots,x_n), f_2(x_1,\ldots,x_n),\ldots,f_m(x_1,\ldots,x_n))$$

tal que:

1. *$\bar{y} = f(\bar{x})$ es solución del problema $F(\bar{x},\bar{y}) = 0$; es decir,*

$$F(\bar{x}, f(\bar{x})) = 0$$

para todo $\bar{x} \in V$.

2. *Además, ésa es la única solución en un entorno de $(\bar{x}_0, \bar{y}_0)$: eso significa si $(\bar{a}, \bar{b}) \in (V \times W)$ es una solución de la ecuación, es decir si $F(\bar{a}, \bar{b}) = 0$, entonces ha de ser necesariamente $\bar{b} = f(\bar{a})$.*

Observación. La definición dice que hay un entorno $V \times W$ de $(\bar{x}_0, \bar{y}_0)$ en el que la función $f(\bar{x})$ soluciona la ecuación $F(\bar{x}, \bar{y}) = 0$. Es decir, que al sustituir es $F(\bar{x}, f(\bar{x})) = 0$. Como ya hemos visto antes, en el ejemplo 3, no podemos esperar que f sea la única solución en un entorno de $\bar{x}_0$. Pero lo que pedimos es que sea la única solución en un entorno de $(\bar{x}_0, \bar{y}_0)$; es decir, teniendo en cuenta también el valor $\bar{y}_0$.

1.4.1. Enunciado del Teorema de la función implícita

Ahora tenemos el lenguaje necesario para formular el teorema central de este apartado:

Teorema 5. (Teorema de la función implícita.) *Sea U un abierto de $\mathbb{R}^{n+m}$ y $F = (F_1, \dots, F_m) : U \to \mathbb{R}^m$ una función de clase C^k en U. Si $(\bar{x}_0, \bar{y}_0)$ es un punto de U tal que*

$$F(\bar{x}_0, \bar{y}_0) = 0$$

y además:

$$\left| \frac{\partial(F_1, \dots, F_m)}{\partial(y_1, \dots, y_m)} \right| \neq 0$$

entonces la ecuación $F(\bar{x}, \bar{y}) = 0$ define a $\bar{y}$ como función implícita de $\bar{x}$. Además, con la notación de la definición 4, existe una única solución $f : V \to W$ de clase C^k de este problema.

1.5. Derivación implícita

Una vez que estamos en las condiciones del teorema anterior, podemos calcular las derivadas parciales de las funciones

$$y_j(x_1, \dots, x_n)$$

en x_0. En efecto, puesto que $f = (f_1, \dots, f_m)$ es de clase C^k en un entorno de x_0, aplicando la regla de la cadena a

$$F_j\left(x_1, \dots, x_n, y_1(x_1, \dots, x_n), \dots, y_m(x_1, \dots, x_n)\right) = 0$$

tenemos:

$$0 = \frac{\partial F_j}{\partial x_i} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(x_0, y_0) + \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial F_j}{\partial y_k}(x_0, y_0) \frac{\partial y_k}{\partial x_i}(x_0)$$

donde $i = 1, \dots, n$. Es decir que tenemos un sistema lineal de n ecuaciones con n incógnitas: las n derivadas parciales

$$\frac{\partial y_k}{\partial x_i}(x_0)$$

que buscamos. Y su determinante es distinto de cero, porque es el mismo determinante que aparece en el teorema. Se puede resolver este sistema para despejar las derivadas parciales.
A este proceso es al que conocemos como **derivación implícita** de la ecuación $F(x, y) = 0$.

2. Teorema de la función inversa. Sistemas de coordenadas

2.1. Presentación del problema

El problema del que nos vamos a ocupar es un caso especial del problema general que hemos visto al tratar sobre el teorema de la función implícita. Recordemos de que trata el teorema de la función implícita. Si se tiene un sistema de ecuaciones tal como

$$F(\bar{u},\bar{v})=0,\text{ es decir }\begin{cases}F_1(u_1,\dots,u_n,v_1,\dots,v_m)=0\\ \qquad\vdots\\ F_m(u_1,\dots,u_n,v_1,\dots,v_m)=0\end{cases}\tag{1}$$

el teorema de la función implícita fija las condiciones que tienen que cumplirse para que sea posible despejar de este sistema las variables $v_1,\dots,v_m$ en función de las variables $u_1,\dots,u_n$ (la solución es local, definida en un entorno de una solución dada del sistema). Conviene releer el enunciado de ese teorema y haber entendido completamente los ejemplos que lo acompañan antes de seguir adelante. Recordemos que el teorema concluye que la condición esencial para que sea posible despejar las variables $\bar{v}$ para obtener una función diferenciable de las variables $\bar{u}$ es que, en el punto en el que despejamos, se tiene que cumplir

$$\det\frac{\partial(F_1,\dots,F_m)}{\partial(v_1,\dots,v_m)}\neq 0$$

Es decir, que *la matriz de derivadas de las ecuaciones con respecto a las variables que se quieren despejar debe tener determinante no nulo.*

El teorema de la función inversa se aplica cuando el sistema de ecuaciones con el que empezamos es de la forma:

$$\bar{y}=F(\bar{x}),\text{ es decir }\begin{cases}y_1=F_1(x_1,\dots,x_n)\\ \qquad\vdots\\ y_n=F_n(x_1,\dots,x_n)\end{cases}\tag{2}$$

(atención: el número de variables y y de variables x coincide) y tratamos de “darle la vuelta” para despejar las variables $\bar{x}$ en función de las $\bar{y}$. El sistema de partida se puede escribir en la forma:

$$\begin{cases}F_1(x_1,\dots,x_n)-y_1=0\\ \qquad\vdots\\ F_n(x_1,\dots,x_n)-y_n=0\end{cases}$$

para que tenga la misma forma que el sistema (1). Y si lo que queremos es despejar las variables $\bar{x}$, el teorema de la función implícita dice hay que asegurarse de que el determinante de las derivadas de estas ecuaciones con respecto a $\bar{x}$ (las variables que se despejan) tiene que ser no nulo. Es decir, que en el punto en el que despejamos tiene que ser:

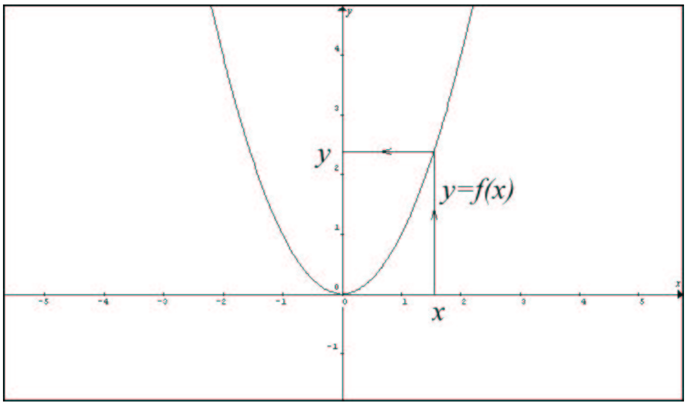
$$\begin{pmatrix}\dfrac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_1}{\partial x_n}\\ & \ddots & \\ \dfrac{\partial F_n}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_n}{\partial y_n}\end{pmatrix}\neq 0\tag{3}$$

En este sentido, el teorema de la función inversa es, como hemos dicho, sólo un caso especial del teorema de la función implícita. Y podríamos pasar muy rápidamente sobre él. Pero las funciones inversas son tan importantes que merece la pena detenerse en su estudio, y ver algunos ejemplos, para conseguir una comprensión más profunda del teorema cuando se aplica a este tipo de problemas.

2.2. Funciones inversas locales en una variable

Empezamos por el que posiblemente sea el ejemplo más sencillo, pero que contiene ya casi todos los ingredientes del resultado general:

Ejemplo 6. *Consideremos la ecuación $y = f(x) = x^2$. Los puntos del plano x, y que cumplen esta ecuación son los de una parábola:*



La fórmula $y = f(x)$ nos lleva de un valor x al correspondiente y pasando por la parábola, como ilustran las flechas en esta figura.

Supongamos ahora que lo que queremos es despejar la x como función de la y. Al tratar de hacerlo, como sabemos se obtienen dos fórmulas, llamémoslas g_1 y g_2 para distinguirlas:

$$x = g_1(y) = +\sqrt{y}, \qquad x = g_2(y) = -\sqrt{y}$$

Estas dos fórmulas tienen que hacer el camino contrario al de las flechas de la figura anterior. Nos llevan de la y a la x. Por esa razón es evidente que las dos fórmulas sólo tienen sentido para $y \geq 0$. No hay puntos en la parábola con y negativa.

Las dos fórmulas verifican además que

$$f(g_1(y)) = y, \qquad f(g_2(y)) = y$$

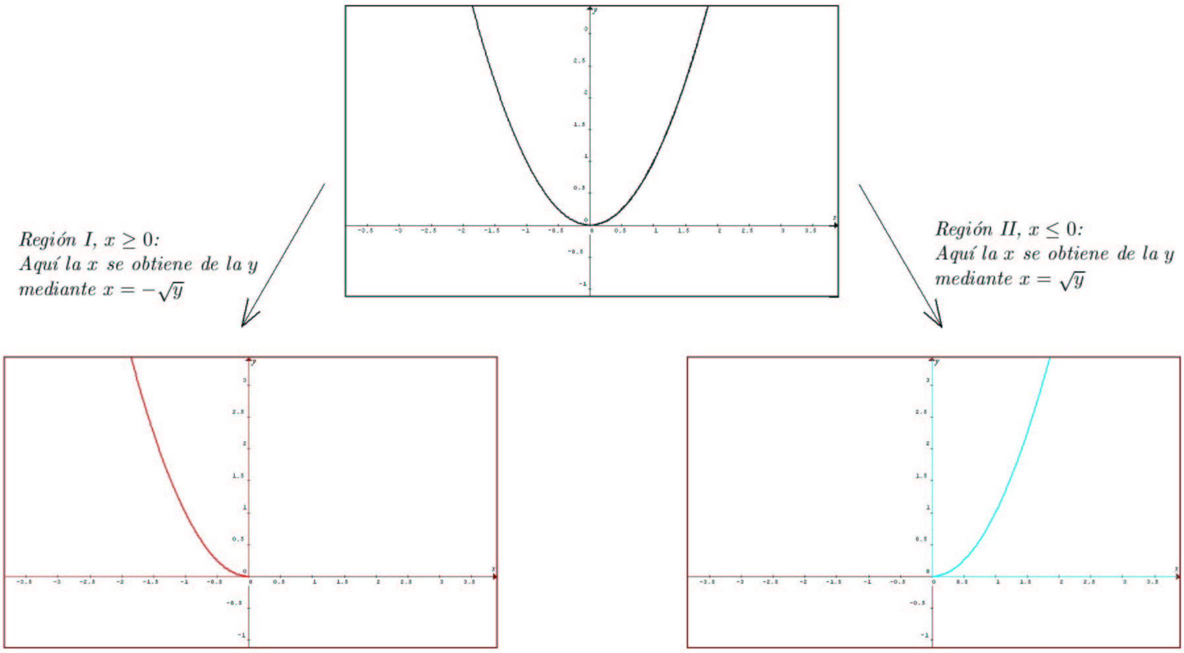
¿Por qué hay dos fórmulas? A la vista del anterior dibujo es evidente: porque para cada valor $y \geq 0$ existen dos valores de x tales que (x, y) está en la parábola. Es decir, el camino de vuelta desde la y a la x no es único. Eso significa que no es cierto que se cumpla

$$g_1(f(x)) = x$$

para cualquier x. Por ejemplo, si $x = -3$

$$g_1(f(-3)) = g_1(9) = 3$$

Los valores de x para los que se cumple $g_1(f(x)) = x$ son los que cumplen $x \geq 0$. Y los valores que cumplen $g_2(f(x)) = x$ son los que cumplen $x \leq 0$. Parece ser, por tanto, que cuando tratamos de invertir la función f, para volver desde y hacia x tenemos que considerar dos regiones distintas, como se ilustra en la siguiente figura.



Las funciones g_1 y g_2 son inversas locales *de la f, en el sentido que estamos viendo. Ambas permiten volver desde la y a la x, pero sólo en una cierta región de valores de x.*

La frontera entre ambas regiones es el punto $x = 0$. En ese punto la función $y = f(x)$ tiene un mínimo local, y por tanto su derivada se anula. Y si nos preguntamos por la derivada de las dos inversas locales, obtenemos:

$$g_1'(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}, \qquad g_2'(y) = -\frac{1}{2\sqrt{y}}$$

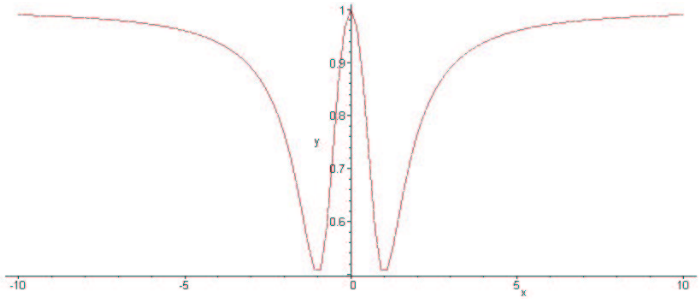
Es decir, que ambas funciones son derivables salvo en $y = 0$. Como veremos, no es casualidad que $y = 0$ sea el valor correspondiente a $x = 0$, que es el valor de x que separa ambas regiones.

Para el segundo ejemplo vamos a permanecer todavía dentro del ámbito de las funciones de una variable. Se trata de comprobar que las observaciones que hemos hecho en el primer ejemplo parecen extenderse a otros ejemplos más complicados.

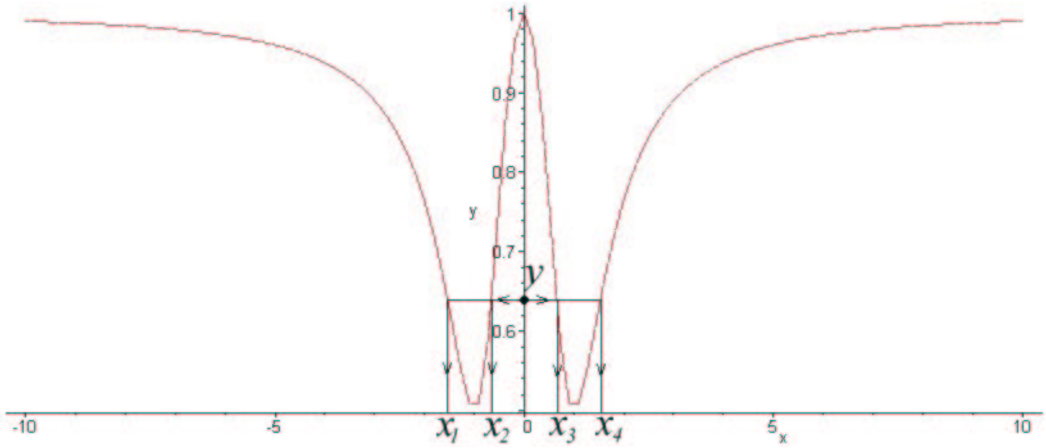
Ejemplo 7. *Consideremos la función*

$$y = f(x) = 1 - \frac{x^2}{x^4 + 1}$$

cuya gráfica es ésta:



Vamos a tratar, como en el anterior ejemplo de despejar la x en función de la y. Está claro, a partir de la figura, que sólo es posible volver de la y a la x si empezamos con un valor de la y entre 0 y 1. Pero si tomamos uno de esos valores $0 \leq y \leq 1$, desde ese valor se puede volver a cuatro valores diferentes de la x, como se muestra en esta figura:



De hecho, en este caso es posible resolver la ecuación, porque al escribir

$$y(x^4 + 1) = (x^4 + 1) - x^2$$

se obtiene una ecuación bicuadrada en x, que una vez resuelta produce estas cuatro fórmulas:

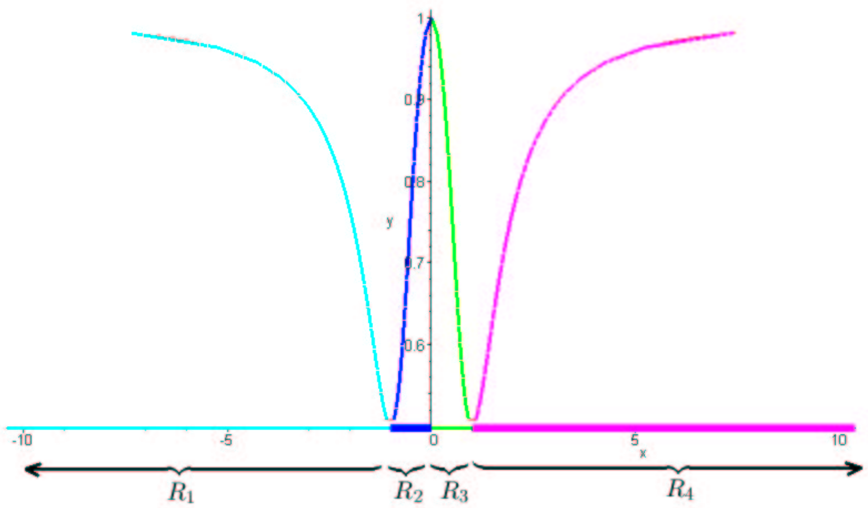
$$x = g_1(y) = \frac{\sqrt{-(2\,y-2)\left(1+\sqrt{-3-4\,y^2+8\,y}\right)}}{2\,y-2}, \qquad x = g_2(y) = \frac{\sqrt{2}\sqrt{(y-1)\left(-1+\sqrt{-3-4\,y^2+8\,y}\right)}}{2\,y-2},$$

$$x = g_3(y) = -\frac{\sqrt{2}\sqrt{(y-1)\left(-1+\sqrt{-3-4\,y^2+8\,y}\right)}}{2\,y-2}, \qquad x = g_4(y) = -\frac{\sqrt{-(2\,y-2)\left(1+\sqrt{-3-4\,y^2+8\,y}\right)}}{2\,y-2}$$

Al igual que ocurría en el anterior ejemplo, es cierto que

$$f(g_1(y)) = y, f(g_2(y)) = y, f(g_3(y)) = y, f(g_4(y)) = y$$

Pero en general no se cumple, por ejemplo, que $g_1(f(x)) = x$ para todo x. Hay cuatro fórmulas y los valores de x quedan divididos en cuatro regiones, que se ilustran en esta figura (es conveniente verla en colores):



Las regiones son

$$\begin{array}{ll} R_1 = \{x : x \leq -1\} & R_2 = \{x : -1 \leq x \leq 0\} \\ R_3 = \{x : 0 \leq x \leq 1\} & R_4 = \{x : 1 \leq x\} \end{array}$$

En la región R_1, formada por los x con $x \leq -1$, sí se cumple que

$$g_1(f(x)) = x$$

Y lo mismo sucede en R_2 con g_2, etcétera. Los puntos que separan esas cuatro regiones son, salta a la vista, los puntos estacionarios de f, es decir, son los x en los que $f'(x)$ se anula. Dejamos como ejercicio para el lector comprobar que las soluciones de $f'(x) = 0$ son precisamente $x = -1, 0, 1$, que son los puntos que separan entre sí las cuatro regiones. Las cuatro funciones g_1, g_2, g_3, g_4 son inversas locales de f, cada una en la correspondiente región.

Conviene también detenerse a pensar en la derivada de las inversas locales. Tomemos por ejemplo la función $x = g_2(y)$, que viene dada por la fórmula

$$x = g_2(y) = \frac{\sqrt{2}\sqrt{(y-1)\left(-1+\sqrt{-3-4\,y^2+8\,y}\right)}}{2\,y-2}$$

La región R_2 comprende los x entre $x_a = -1$ y $x_b = 0$. Obsérvese que

$$y_a = f(x_a) = f(-1) = \frac{1}{2}, \qquad y_b = f(x_b) = f(0) = 1$$

Pues bien, si se deriva g_2 se obtiene esta expresión[2]*:*

$$g_2'(y) = -1/4\,\frac{\left(-1+\sqrt{-3-4\,y^2+8\,y}\right)\sqrt{2}}{(y-1)\sqrt{(y-1)\left(-1+\sqrt{-3-4\,y^2+8\,y}\right)}\sqrt{-3-4\,y^2+8\,y}}$$

[2] Si el lector desea comprobar por sí mismo los cálculos de esta última parte del ejemplo, es aconsejable utilizar un programa de cálculo simbólico, tal como Derive, Maple, Mathematica, o similares.

Y si se sustituye y por $y_a = 1/2$ o por $y_b = 1$ se comprobará que la derivada g_2' no existe en ninguno de esos dos valores. Y no hay ningún otro valor de y entre 0 y 1 (los únicos importantes en este ejemplo) para el que no exista la derivada g_2'. Para que quede claro cuál es la observación: la derivada de $g_2(y)$ no existe en aquellos valores de y que corresponden a valores x con $f'(x) = 0$, y que son precisamente los x que marcan la frontera de la región R_2. Para entender el sentido geométrico de esta observación el lector debe hacerse estas preguntas: ¿Cuál es la posición de la recta tangente a la gráfica en estos puntos? ¿Por qué es entonces evidente que en esos puntos $g_2(y)$ no puede ser derivable?

Antes de seguir adelante queremos dejar claro un punto que ha aparecido en los ejemplos anteriores. Supongamos que tenemos una función $y = f(x)$, que $y_0 = f(x_0)$, y que f es derivable en x_0. Si $x = g(y)$ es una inversa local de f en una región R que contiene a x_0, entonces debe cumplirse

$$g(f(x)) = x \tag{4}$$

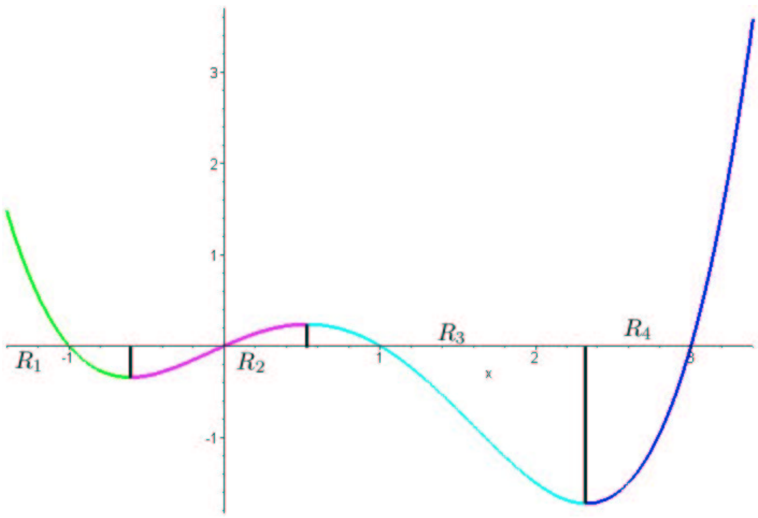
para todos los x de esa región. Entonces, si la inversa local es derivable en $y_0 = f(x_0)$, aplicando la regla de la cadena podemos calcular la derivada en x_0 (con respecto a x) de la igualdad (2.2), para obtener:

$$g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) = 1; \text{ es decir, } g'(y_0) \cdot f'(x_0) = 1$$

Ahora bien, si el punto x_0 cumple $f'(x_0)$ (es estacionario), entonces se obtendría $0 = 1$, lo cual es imposible. Por lo tanto, si $f'(x_0) = 0$, es imposible que exista la derivada $g'(y_0)$.

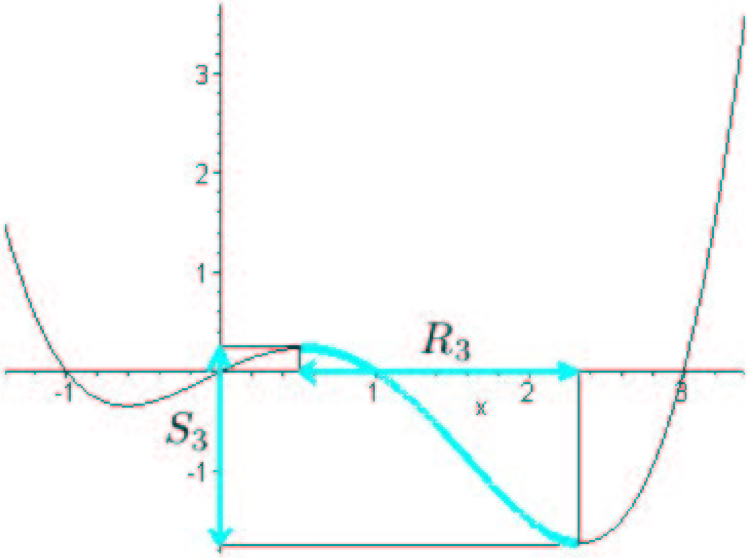
Esta observación significa que los puntos x_0 que cumplen $f'(x_0) = 0$ imponen restricciones a las inversas locales de f: las inversas locales no pueden ser derivables en esos puntos. Recuérdese que en los ejemplos que hemos visto esos puntos eran precisamente los que delimitaban las regiones en las que existían distintas inversas locales de f.

Resumiendo: el conjunto de valores de x queda dividido en regiones, delimitadas por los puntos solución de $f'(x) = 0$, y en cada una de esas regiones existe una inversa local. Ahora bien, los valores de la y también quedan divididos en regiones. En un ejemplo genérico, como el que se muestra en esta figura, dada una función $y = f(x)$



es fácil ver los valores de x quedan divididos en cuatro regiones, que se indican en la figura. A cada una de estas regiones le corresponde una inversa local $x = f_i^{-1}(y)$, para $i = 1, 2, 3, 4$. Pero

¿cuáles son los valores de la y para los que está definida esa inversa local? Si nos fijamos por ejemplo en la región R_3, es fácil comprender que los valores x de esta región se corresponden con los valores de y en la región S_3 que se indica en esta figura:



de manera que cada x de R_3 se transforma mediante f en un y de S_3, y recíprocamente, cada y de S_3 se transforma mediante la inversa local f_3^{-1} en un x de R_3. Para resumir ésta situación decimos que f y f_3^{-1} son inversas entre las regiones R_3 y S_3.

2.3. Inversas locales como cambios de variable

Supongamos entonces que la función $y = f(x)$ tiene una inversa local en una región R, y que esa inversa local $x = f^{-1}(y)$ está definida en una región S de valores de y. Entonces a cada x de R le corresponde un único y en S, y viceversa. Lo cual significa que podemos usar los valores de y para representar a los x, sin que se produzcan ambigüedades ni pérdidas de información. Es decir, que podemos utilizar la fórmula $y = f(x)$ para cambiar la variable x por la variable y. Si después, a partir de la y queremos recuperar la x, hacemos $x = f^{-1}(y)$. Un par de ejemplos ilustrarán lo que queremos decir.

Ejemplo 8.

1. *Si queremos resolver la ecuación*

$$x^6 - 5x^3 + 6 = 0$$

podemos hacer el cambio de variable $y = f(x) = x^3$. Entonces se tiene

$$y^2 - 5y + 6 = 0$$

y es fácil ver que las soluciones de esta ecuación son $y = 2, 3$. Para recuperar las soluciones de la primera ecuación deshacemos el cambio de variable. Es decir, aplicamos la transformación inversa

$$x = f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y}$$

y obtenemos $x = \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{3}$ *como soluciones de esa ecuación.*

¿Por qué estamos seguros de que así hemos obtenido todas *las soluciones* x *de la ecuación original? Pues mediante las ecuaciones* $y = f(x)$ *y* $x = f^{-1}(y)$ *a cada* x *le corresponde un* y *único y viceversa. Son inversas la una de la otra en todo* $\mathbb{R}$. *Si hubiera otra solución* x_0 *de la primera ecuación, distinta de* $\sqrt[3]{2}$ *y* $\sqrt[3]{3}$, *entonces* $y_0 = f(x_0) = x_0^3$ *tendría que ser solución de la segunda ecuación, y* sería distinta *de 2 y 3, lo cual es absurdo*[3].

2. *Para resolver la ecuación*

$$x^4 - 5x^2 + 6 = 0$$

podemos hacer el cambio de variable $y = f(x) = x^2$. *Entonces se obtiene de nuevo*

$$y^2 - 5y + 6 = 0$$

Cuyas soluciones son, como ya sabemos $y = 2, 3$. *El problema surge cuando tratamos de volver de la* y *a la* x. *Porque ahora existen dos inversas locales:*

$$\begin{cases} x = f_1^{-1}(y) = +\sqrt{y} \\ x = f_2^{-1}(y) = -\sqrt{y} \end{cases}$$

y si queremos recuperar todos los valores de x *tenemos que aplicar ambas, para obtener*

$$x = +\sqrt{2}, -\sqrt{2}, +\sqrt{3}, -\sqrt{3}$$

En general, para usar con garantías un cambio de variable $y = f(x)$, es preciso hacer un estudio detallado de las inversas locales de f, sus regiones de definición, su diferenciabilidad, etcétera. La herramienta fundamental para este tipo de estudio es el teorema de la función inversa.

3. Inversas locales en el plano $\mathbb{R}^2$. Cambios de sistemas de coordenadas

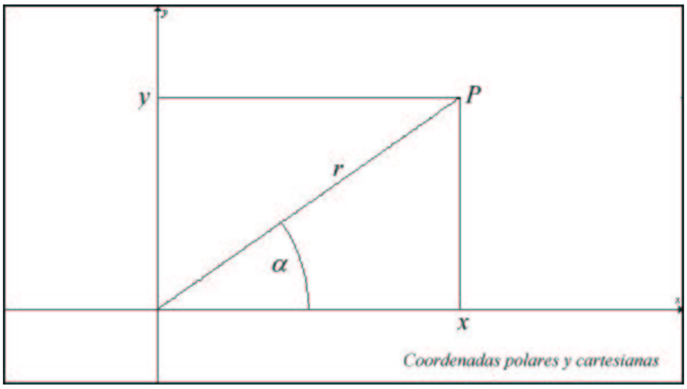
Conocemos ya dos sistemas de coordenadas distintos en el plano. El sistema de coordenadas cartesianas y el de coordenadas polares. ¿En qué consiste un sistema de coordenadas del plano? Vamos a examinar atentamente ambos sistemas para extraer algunas conclusiones que nos permitirán comprender otros sistemas de coordenadas diferentes.

3.1. Coordenadas cartesianas y polares

El sistema de coordenadas cartesianas identifica un punto del plano mediante los valores de x y de y. El de las coordenadas polares identifica un punto mediante los valores de r y α. Hay una forma de describir estos sistemas de coordenadas mediante familias de *curvas coordenadas* que lugo nos será muy útil.

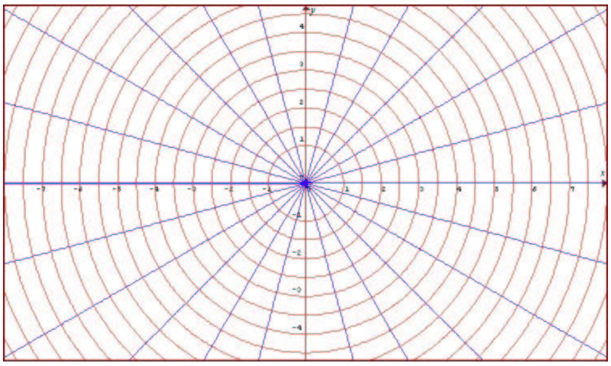
Empecemos con las coordenadas polares. En este sistema de coordenadas un punto del plano se identifica mediante el radio r y el ángulo α, que tienen el significado geométrico que ya conocemos:

[3] Una observación: así recuperamos todas las soluciones reales de la primera ecuación. ¡Pero no todas las soluciones complejas! Una ecuación polinómica de grado seis tiene siempre seis soluciones complejas, y nosotros sólo hemos recuperado dos de ellas.

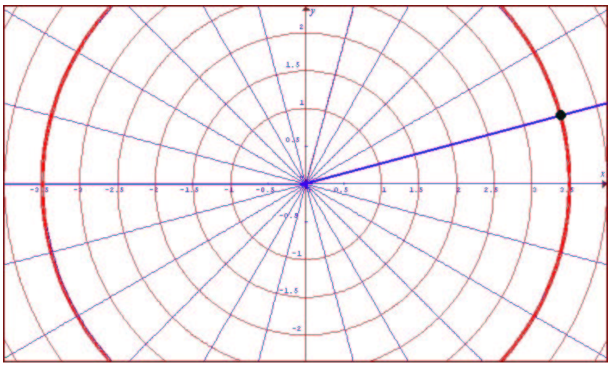


Coordenadas polares y cartesianas

Si nos fijamos en los puntos que tienen un valor fijo del radio, escribiendo $r = r_0$, donde r_0 es una constante, obtenemos una circunferencia (de radio r_0). De la misma forma, si escribimos $\alpha = \alpha_0$ donde α_0 es una constante, obtenemos los puntos de una semirrecta que pasa por el origen (¡ojo! no es una recta completa, y el matiz es muy importante. La otra parte de la recta corresponde a un ángulo distinto, $\alpha_0 + \pi$). Al dibujar estas circunferencias y rectas para distintos valores de r_0 y α_0 se obtiene una red de coordenadas como la de esta figura:

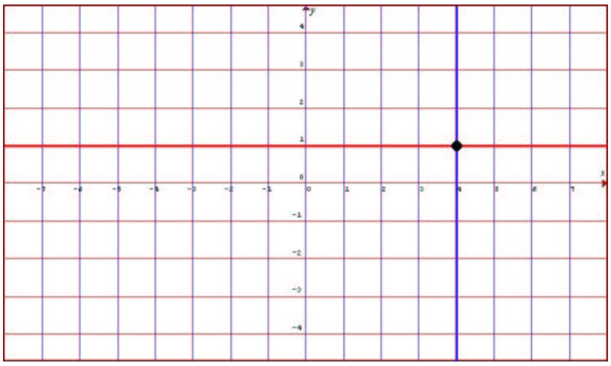


Para identificar un punto del plano, lo que hacemos es señalar la circunferencia y la semirrecta a las que pertenece, como en esta figura, en la que se destacan en trazo grueso una circunferencia y una semirrecta, junto con el punto del plano que determinan:



Hay, sin embargo, algunas dificultades. No es posible describir el origen de esta forma sin ambigüedad: ¿a qué semirrecta debemos señalar? Y por otra parte, la relación entre las semirrectas y el valor de α_0 también es ambiguo: α_0 y $\alpha_0 + 2\pi$ señalan a la misma recta.

El caso de las coordenadas cartesianas es similar, pero más sencillo. Aquí también, si escribimos $x = x_0$ e $y = y_0$, al variar los valores de las constantes x_0 e y_0 se obtiene una red de curvas coordenadas, que en este caso son rectas paralelas a los ejes de coordenadas.

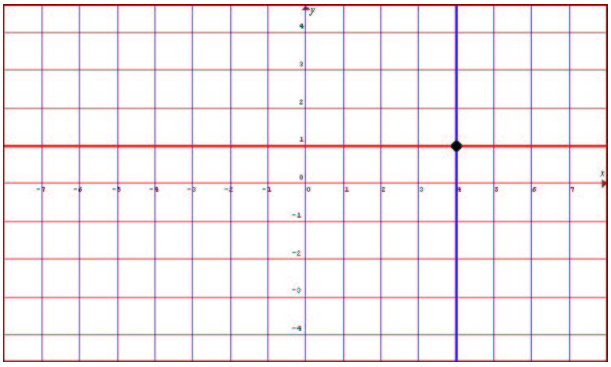


también en este caso, como ilustra la figura, basta con señalar una recta de cada familia para identificar un punto del plano.

Un tercer ejemplo muy sencillo de sistema de coordenadas lo proporcionan las ecuaciones

$$\begin{cases} u = 2x + y \\ v = x - y \end{cases}$$

¿En qué sentido representan estas ecuaciones un sistema de coordenadas? Si fijamos un valor constante en la primera fórmula, escribiendo $u_0 = x + y$, obtenemos una recta. Si hacemos lo mismo en la segunda, escribiendo $v_0 = x - y$, y ahora vamos variando los valores de u_0 y v_0, obtendremos una imagen que ya va siendo familiar: dos familias de curvas (rectas en este caso)



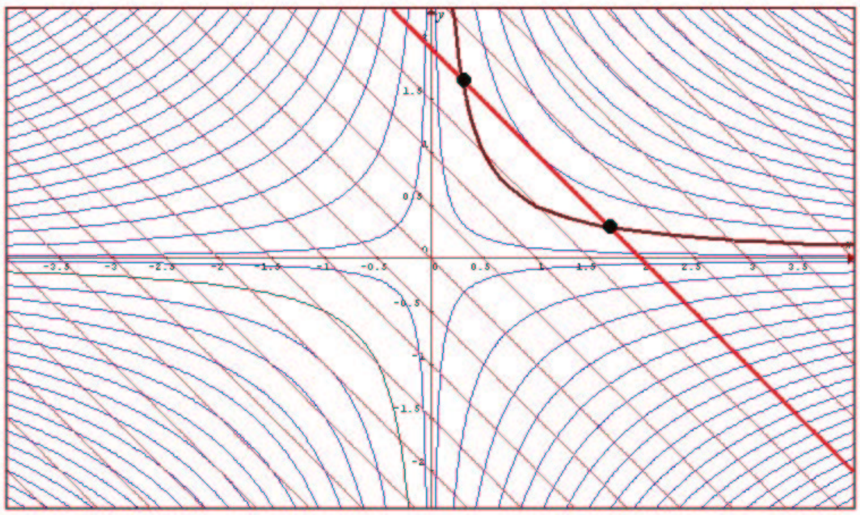
y para determinar un punto del plano basta con señalar una curva de cada familia. Es decir, basta con conocer los valores de u y de v. Podemos decir por eso que (u, v) forman un sistema de coordenadas del plano, de manera que en lugar de dar los valores (x, y), podemos usar (u, v) para identificar los puntos del plano. Es decir se trata de un *cambio de variables*: cambiamos (x, y) por (u, v).

Como en el caso de las funciones de una variable, para que un cambio de variables sea útil es preciso que no hay ambigüedades ni pérdida de información. Hemos visto un ejemplo de las ambigüedades que debemos evitar en el caso de las coordenadas polares: si $r = 0$, sea cual sea α se obtiene el punto $(x, y) = (0, 0)$, el origen. Y además, sea cual sea r, las coordenadas (r, α) y $(r, \alpha + 2\pi)$ producen el mismo punto (x, y). En el caso de las funciones de una variable descubrimos que, para aclarar la situación, había que dividir el conjunto de valores de la variable x en regiones, y utilizar una inversa local distinta según la región. El límite entre esas regiones lo marcaban los ceros de la derivada. Veamos un ejemplo en dos variables.

Ejemplo 9. *Vamos a considerar una aplicación* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} u = xy \\ v = x + y \end{cases} \tag{5}$$

Estas ecuaciones definen la función $(u, v) = f(x, y)$. *Si fijamos un valor* u_0 *de* u, *escribiendo* $xy = u_0$ *obtenemos una curva del plano. Para* $u_0 \neq 0$ *esa curva es una hipérbola. En el caso especial* $u_0 = 0$ *se obtienen los dos ejes de coordenadas. Y si hacemos lo mismo, escribiendo* $x + y = v_0$ *obtenemos una recta paralela a la diagonal del segundo y cuarto cuadrantes. Cuando se hace ésto para distintos valores de* u_0 *y* v_0 *se obtiene, como en anteriores ejemplos, la red de curvas que se muestra en esta figura:*



Pero si se escoge una hipérbola (un valor de u_0*) y una recta (un valor de* v_0*), resaltadas en trazo grueso en la figura, se observa que hay dos puntos de corte. Así que el par de valores* (u_0, v_0) *no identifica uno, sino dos puntos del plano. Esta ambigüedad impide usar* (u, v) *como un sistema de coordenadas en todo el plano, en lugar de* (x, y).

Esa ambigüedad se detecta también cuando se intenta dar la vuelta al sistema de ecuaciones (5) para despejar x, y *como funciones de* u, v. *Tenemos:*

$$y = v - x, \text{ luego } u = x(v - x) = vx - x^2; \text{ es decir, } x^2 - vx + u = 0$$

y al resolver esta ecuación de grado 2 para x *se obtiene:*

$$x = \frac{v \pm \sqrt{v^2 - 4\,u}}{2}, \text{ con lo que, sustituyendo, } y = \frac{v \mp \sqrt{v^2 - 4\,u}}{2}$$

Se obtienen así dos sistemas de fórmulas,

$$f_1^{-1}:\begin{cases} x=\dfrac{v+\sqrt{v^2-4\,u}}{2} \\ y=\dfrac{v-\sqrt{v^2-4\,u}}{2} \end{cases} \qquad\qquad f_2^{-1}:\begin{cases} x=\dfrac{v-\sqrt{v^2-4\,u}}{2} \\ y=\dfrac{v+\sqrt{v^2-4\,u}}{2} \end{cases}$$

A la vista de lo que ocurría en el caso de una variable, es razonable esperar que estas fórmulas definan inversas locales de f en dos regiones distintas del plano. En una de esas regiones habrá que utilizar las fórmulas f_1^{-1} para cambiar entre las variables (x, y) y las (u, v), y en la otra región tendremos que usar las fórmulas f_2^{-1}.

¿Cómo podemos averiguar cuáles son esas regiones? En el caso de una variable obtuvimos esa información mediante los ceros de la derivada. Tratemos de hacer lo mismo. A partir de:

$$\begin{cases} u = xy \\ v = x + y \end{cases}$$

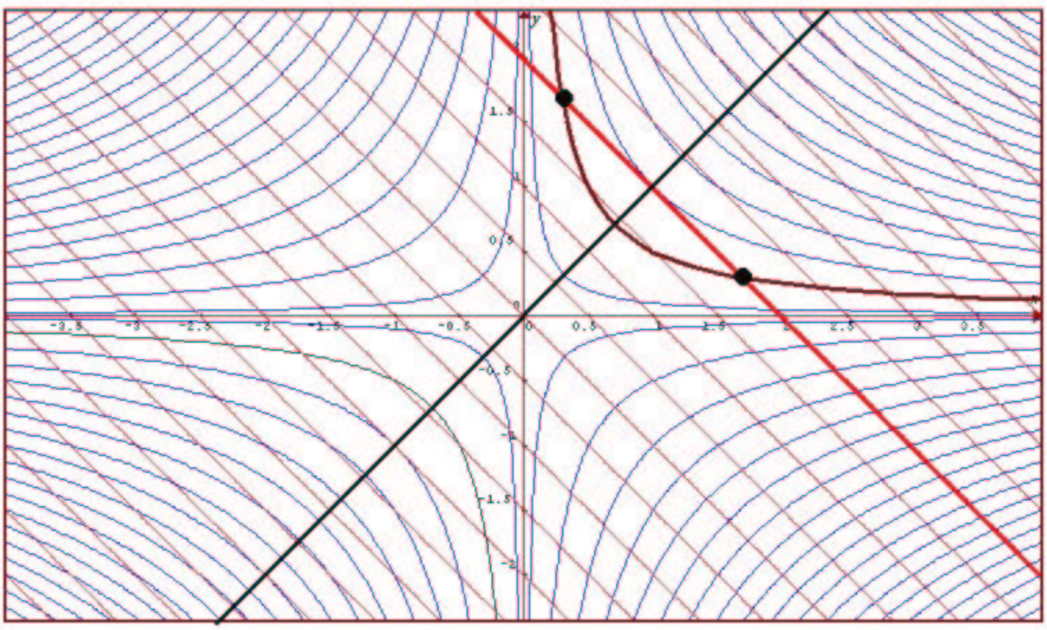
calculamos la matriz jacobiana:

$$df = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & x \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

A la vista de lo que hemos aprendido sobre funciones inversas, lo razonable es estudiar los puntos en los que el determinante de esta matriz se anula. Es decir, los puntos que cumplen:

$$y - x = 0$$

Esos puntos forman la recta diagonal del primer y tercer cuadrantes, que divide al plano en dos regiones, dos semiplanos $R_1 = \{x - y \geq 0\}$ y $R_2 = \{x - y \leq 0\}$. Si se añade esa recta al dibujo

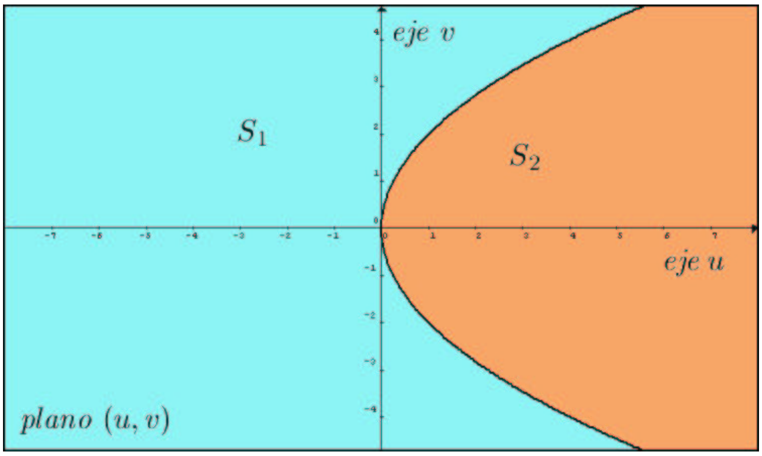


se observa que cada uno de los puntos de corte pertenece a una región distinta: la ambigüedad queda resuelta.

Ahora ya está claro cuáles son las dos regiones R_1 y R_2 en que ha quedado dividido el plano (x, y). ¿Pero cuáles son las regiones S_1 y S_2 de valores de (u, v) que les corresponden? ¿Y qué inversa local hay que usar en cada región? Para responder a estas preguntas observemos que la frontera de las regiones $R_1 = R_2$ la definen los puntos con $x = y$. Esos puntos se transforman, mediante f en puntos (u, v) que cumplen

$$\begin{cases} u = x^2 \\ v = 2x \end{cases} \qquad \text{, es decir: } 4u = v^2$$

Para entender bien lo que esto significa utilizamos otro plano, distinto del plano x, y, en el que representamos sobre los ejes los valores de u y de v. Nos referiremos a este segundo plano como el plano (u, v). En este plano, la ecuación $4u = v^2$ representa la parábola que aparece en la figura, y que divide al plano (u, v) en dos regiones S_1 y S_2:



Obsérvese además que los puntos de la parábola son precisamente los puntos en que las ecuaciones de las inversas locales $f_1^{-1}(u, v)$ y $f_2^{-1}(u, v)$ no son derivables: porque $v^2 - 4u$ es precisamente lo que aparece dentro del símbolo raíz en esas inversas locales.

Las fórmulas que definen a las inversas f_1^{-1} y f_2^{-1} sólo tienen sentido si $v^2 - 4u \geq 0$. Es decir, si $v^2 > 4u$, y eso significa que (u, v) está en la región S_1. Es importante darse cuenta de que esto significa que, al calcular f, los puntos de R_1 van a parar a S_1, ¡y los de R_2 también! Pero al tratar de volver desde S_1 al plano (x, y) debemos ser cuidadosos. Obsérvese que de

$$f_1^{-1} : \begin{cases} x = \dfrac{v + \sqrt{v^2 - 4\,u}}{2} \\ y = \dfrac{v - \sqrt{v^2 - 4\,u}}{2} \end{cases}$$

se deduce que

$$x - y = \sqrt{v^2 - 4\,u} \geq 0$$

Así que f_1^{-1} envía la región S_1 en el semiplano $R_1 = \{x - y \geq 0\}$, mientras que f_2^{-1} envía la región S_1 en el semiplano R_2.

3.2. Definición de inversa local

Los ejemplos que hemos visto han preparado el terreno para las definiciones formales:

Definición 10. *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una aplicación, que vendrá dada por unas ecuaciones:*

$$\bar{u} = f(\bar{x}), \text{ es decir: } \begin{cases} u_1 = u_1(x_1, \ldots, x_n) \\ u_2 = u_2(x_1, \ldots, x_n) \\ \quad \vdots \\ u_n = u_n(x_1, \ldots, x_n) \end{cases}$$

Sea $\bar{x}_0$ un punto de R^n, y sea $\bar{u}_0 = f(\bar{x}_0)$. Decimos que f tiene una inversa local en $\bar{x}_0$ si existe un entorno A de $\bar{x}_0$, un entorno B de $\bar{u}_0$, y una aplicación $f^{-1} : R^n \to \mathbb{R}^n$ tales que:

1. *Si $\bar{x} \in A$, entonces $f(\bar{x}) \in B$. Recíprocamente, si $\bar{u} \in B$, entonces $f^{-1}(\bar{u}) \in B$*
2. *Si $\bar{x} \in A$, entonces $f^{-1}(f(\bar{x})) = \bar{x}$. Recíprocamente, si $\bar{u} \in B$, entonces $f(f^{-1}(\bar{u})) = \bar{u}$*

Es decir, que la función f establece un cambio de variables fiable (sin ambigüedades, ni pérdida de información) entre los valores $\bar{x}$ de la región A, y los valores $\bar{u}$ de la región B.

3.2.1. El teorema de la función inversa

Con la anterior definición tenemos todos los ingredientes para entender el enunciado general del teorema, en el que interviene la condición sobre el determinante del jacobiano que vimos al comienzo del capítulo como consecuencia del teorema de la función implícita:

Teorema 11 (Función inversa)**.** *Sea, como antes $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una aplicación, y $\bar{x}_0$ un punto de R^n, con $u_0 = f(\bar{x}_0)$. Supongamos que f es diferenciable en un entorno de $\bar{x}_0$ y que se cumple la condición*

$$\det df(\bar{x}_0) = \det \frac{\partial(u_1, \ldots, u_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)} = \det \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial u_1}{\partial x_n} \\ & \ddots & \\ \dfrac{\partial u_n}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial u_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} \neq 0$$

Entonces existe una inversa local f^{-1} de f, definida entre un entorno A de $\bar{x}_0$ y un entorno B de $\bar{u}_0$. Además, f^{-1} es diferenciable en todos los puntos de B y se cumple:

$$d(f^{-1})(\bar{u}_0) = (df(\bar{x}_0))^{-1}$$

donde la segunda inversa se refiere a la inversa de la matriz jacobiana.

La mejor forma de recordar la expresión que aparece al final del teorema es "la jacobiana de la inversa es la inversa de la jacobiana".

Como ya hemos señalado antes, este teorema puede verse simplemente como un caso especial del teorema de la función implícita. Y recíprocamente, el teorema de la función implícita se puede demostrar usando el teorema de la función inversa. Pero ahora queremos dar otra justificación del teorema de la función inversa, que puede servir de base para construir una demostración rigurosa (tipo $\varepsilon - \delta$). Sabemos que si f es diferenciable en $\bar{x}_0$ entonces, para $\bar{x}$ cercano a $\bar{x}_0$ se tiene esta aproximación:

$$\bar{u} = f(\bar{x}) \approx f(\bar{x}_0) + df(\bar{x}_0)(\bar{x} - \bar{x}_0) = \bar{u}_0 + df(\bar{x}_0)(\bar{x} - \bar{x}_0)$$

Para encontrar la función inversa tenemos que tratar de despejar $\bar{x}$ en función de $\bar{u}$. Al intentar hacer ésto en la anterior aproximación se obtiene

$$\bar{u} - \bar{u}_0 \approx df(\bar{x}_0)(\bar{x} - \bar{x}_0)$$

Para seguir despejando, tenemos que "pasar la matriz $df(\bar{x}_0)$ al otro miembro". Y para que eso sea posible la condición clave es que el determinante de esa matriz sea no nulo. Y en ese caso tendremos:

$$\bar{x} \approx \bar{x}_0 + (df(\bar{x}_0))^{-1} (\bar{u} - \bar{u}_0)$$

Al llegar aquí hemos sido capaces de despejar $\bar{x}$, así que la inversa f^{-1} existe. Pero además, tenemos una fórmula de aproximación local, así que la inversa es diferenciable. Y por último, su jacobiana no puede ser otra más que la inversa de la jacobiana de f. Como hemos dicho, convertir este argumento en una demostración formal exige ser cuidadosos con los detalles, pero es sencillo.

3.3. Funciones con inversa no diferenciable

La regla de la cadena implica que en los puntos en los que $\det df'(\bar{x}_0) = 0$, es imposible que exista inversa local diferenciable. En efecto, si existiera f^{-1} diferenciable, llamando $\bar{u}_0 = f(\bar{x}_0)$ se tendría

$$(f^{-1} \circ f)(\bar{x}) = \bar{x}$$

Es decir, que $(f^{-1} \circ f)$ es la aplicación identidad, cuya jacobiana es (compruébese) la matriz identidad. Y aplicando aquí la regla de la cadena:

$$d(f^{-1})(\bar{u}_0) df(\bar{x}_0) = I$$

Pero eso significa que $d(f^{-1})(\bar{u}_0)$ es la matriz inversa de $df(\bar{x}_0)$, por lo que esta matriz tiene que tener determinante no nulo.

Este resultado es una especie de recíproco parcial del teorema de la función inversa: si $\det df(\bar{x}_0) \neq 0$ entonces existe inversa local diferenciable. Y si $\det df(\bar{x}_0) = 0$ entonces es imposible que exista inversa local diferenciable. Pero puede ocurrir que sea $\det df(\bar{x}_0) = 0$ y que aún así exista una inversa, que no será en ese caso diferenciable. Ya hablamos de ésto en la página 14, pero lo recordamos ahora para que se entienda cuál es exactamente la información que el teorema proporciona. Veamos ahora un ejemplo sencillo.

Ejemplo 12. *Si tenemos $y = f(x) = x^3$, entonces $f'(x) = 3x^2$. Así que, desde luego, $f'(0) = 0$. Sin embargo existe la inversa $x = f^{-1}(y) = \sqrt[3]{(y)}$. Lo que sucede es que al calcular la derivada de la inversa*

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{3\sqrt[3]{y^2}}$$

se observa que f^{-1} no es derivable en $y = 0$, que es el valor que le corresponde a $x = 0$.

3.4. Inversas globales vs inversas locales

Hemos visto en varios ejemplos que, al tratar de encontrar la inversa de una función $\bar{y} = f(\bar{x})$, a menudo es preciso descomponer los valores de $\bar{x}$ en varias regiones, y que en cada una de ellas puede ser necesario emplear una inversa local diferente. También hemos visto que el teorema de la función inversa puede ayudarnos en la tarea de trazar las fronteras entre esas regiones. Pero la información que proporciona el teorema no es definitiva. Vamos a ver dos ejemplos que muestran las dos caras de la moneda.

Ejemplo 13 (Una inversa global)**.** *Consideremos la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por*

$$\begin{cases} u = x \\ v = x^2 + y \end{cases}$$

Entonces es fácil despejar x, y para obtener:

$$\begin{cases} x = u \\ \\ y = v - u^2 \end{cases}$$

Estas fórmulas definen la función inversa f^{-1}. En este caso no hay necesidad de dividir el plano x, y en regiones, porque las fórmulas que hemos obtenido sirven en todo punto del plano. En este contexto podemos decir que f posee una inversa global en todo el plano. Obsérvese que el jacobiano de f es

$$\det \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2x & 1 \end{pmatrix} = 1$$

Lo cual es coherente con la existencia de una inversa diferenciable en todo punto.

Podría pensarse, a la luz de ejemplos como el anterior, que si se cumple $\det(df \neq 0)$ en todo punto, entonces está garantizada la existencia de una inversa diferenciable global en el mismo sentido que en este ejemplo, con unas fórmulas únicas para la inversa. No es así.

Ejemplo 14. *Consideremos la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por* $\begin{cases} u = e^x \cos y \\ v = e^x \operatorname{sen} y \end{cases}$. *Entonces*

$$\det \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} e^x \cos y & -e^x \operatorname{sen} y \\ e^x \operatorname{sen} y & e^x \cos y \end{pmatrix} = e^x$$

con lo que el determinante del jacobiano nunca se anula. Sin embargo, es evidente que no puede haber unas fórmulas únicas para la inversa, porque el punto (x_0, y_0) y el punto $(x_0, y_0 + 2\pi)$ producen los mismos valores de u y v.

El problema que aparece en este ejemplo es realmente difícil. El teorema de la función inversa garantiza que si $\det df(\bar{x}_0) \neq 0$, entonces existe una inversa local diferenciable, definida en cierta región que contiene a $\bar{x}_0$. Pero no dice gran cosa sobre el tamaño de esa región. Lo más que se puede obtener es alguna indicación a partir de los puntos donde el determinante del jacobiano se anula. Pero aparte de eso no sabemos nada más. Y si no hay puntos donde el determinate se anule, como en este ejemplo, entonces el teorema no permite deducir nada sobre el tamaño de la región. Una posibilidad, en casos como el de este ejemplo, es tratar de hecho de despejar x, y como funciones de u, v. Dejamos al lector como ejercicio intentar ese trabajo en el último ejemplo.