

Cálculo en Varias Variables

Auxiliar 10 - Primavera 2010

Prof: Marcelo Leseigneur
Aux: Sebastián Bustamante F. & Víctor Verdugo S.

P1. Sea $F(u, v) = f(uv, \frac{u^2 - v^2}{2})$, donde $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es una función diferenciable. Verifique que

$$(u^2 + v^2) \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \right] = \left(\frac{\partial F}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial v} \right)^2.$$

P2. Sea $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por:

$$F(u, v, w) = \begin{pmatrix} f_1(u, v, w) \\ f_2(u, v, w) \\ f_3(u, v, w) \end{pmatrix},$$

donde $f_i : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3$.

Se define la divergencia de F como:

$$\operatorname{div}(F) = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}.$$

Por otro lado, sea $G : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por:

$$G(r, \theta, z) = \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \\ z \end{pmatrix}.$$

Se definen además los vectores unitarios $\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{z}$ como sigue:

$$\hat{r} = \frac{\frac{\partial G}{\partial r}}{\left\| \frac{\partial G}{\partial r} \right\|}, \hat{\theta} = \frac{\frac{\partial G}{\partial \theta}}{\left\| \frac{\partial G}{\partial \theta} \right\|}, \hat{z} = \frac{\frac{\partial G}{\partial z}}{\left\| \frac{\partial G}{\partial z} \right\|},$$

donde $\frac{\partial G}{\partial r}, \frac{\partial G}{\partial \theta}, \frac{\partial G}{\partial z}$ son vectores que se obtienen derivando parcialmente a G componente a componente.

Considere, por último, $H : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida como:

$$H(r, \theta, z) = h_1(r, \theta, z)\hat{r} + h_2(r, \theta, z)\hat{\theta} + h_3(r, \theta, z)\hat{z}.$$

i) Encuentre los vectores unitarios $\hat{r}, \hat{\theta}$ y $\hat{z}$.

ii) Deduzca que H se puede escribir como:

$$H(r, \theta, z) = A_1(r, \theta, z)\hat{i} + A_2(r, \theta, z)\hat{j} + A_3(r, \theta, z)\hat{k},$$

donde $\hat{i}, \hat{j}$ y $\hat{k}$ representan los vectores unitarios canónicos.

Encuentre explícitamente A_1, A_2 y A_3 .

iii) Demuestre que

$$\operatorname{div}(H) = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(rh_1)}{\partial r} + \frac{\partial h_2}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial h_3}{\partial z}.$$

P3. Sean $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ y $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones diferenciables.

Si $h(x, y) = f(x, y, h(x, y))$, encuentre $\frac{\partial h}{\partial x}$ y $\frac{\partial h}{\partial y}$.