

MA2001-1 Cálculo en Varias Variables. Semestre 2010-2

Profesor: Marcelo Leseigneur Auxiliares: Sebastián Bustamante y Víctor Verdugo

Auxiliar 9

Martes 12 de Octubre de 2010

P1. Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^2$ y $F(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta)$, con $x = r \cos \theta$ e $y = r \sin \theta$. Pruebe lo siguiente:

- a) $\frac{\partial F}{\partial r}(r, \theta) = \cos \theta \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \sin \theta \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$
- b) $\frac{\partial F}{\partial \theta}(r, \theta) = r \left[\cos \theta \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) - \sin \theta \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right]$
- c) $\frac{\partial^2 F}{\partial r^2}(r, \theta) = \cos^2 \theta \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + 2 \cos \theta \sin \theta \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) + \sin^2 \theta \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y)$
- d) $\|\nabla f(x, y)\|^2 = \left[\frac{\partial F}{\partial r}(r, \theta) \right]^2 + \frac{1}{r^2} \left[\frac{\partial F}{\partial \theta}(r, \theta) \right]^2$

P2. Sea $\alpha : U \rightarrow \mathbb{R}$ una aplicación diferenciable en $U \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto. Sea $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida por $\phi(x) = \alpha(x)x$. Pruebe que ϕ es diferenciable en U y calcule $D\phi(x)$ para todo $x \in U$, en función de $D\alpha(x)$.

P3. Considere $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida por $f(x) = \frac{x}{\|x\|^2}$. Pruebe que f es diferenciable en $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ y determine $Df(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

P4. Considere una cuerda ondulante, cuyo desplazamiento está regido por una función $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, la cual es $\mathcal{C}^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$ y además satisface la ecuación

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t)$$

donde $c^2 = \frac{\tau}{\rho}$. Suponga además, que $\frac{\partial u}{\partial x}(x, t)$ y $\frac{\partial u}{\partial t}(x, t)$ son L -periódicas en x . La cuerda está sujeta a las condiciones iniciales dadas por $u(x, 0) = f(x)$ y $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x)$, donde f es $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ y g es continua.

Se define la energía total de la cuerda como

$$E(t) = \frac{1}{2} \rho \int_0^L \left(\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \right)^2 dx + \frac{1}{2} \tau \int_0^L \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right)^2 dx$$

Muestre que la energía total de la cuerda se conserva, es decir, $E(t)$ es constante. Concluya que

$$E(t) = \frac{1}{2} \rho \int_0^L g(x)^2 dx + \frac{1}{2} \tau \int_0^L f'(x)^2 dx$$