Cálculo en Varias Variables
Tarea 3 - Primavera 2010

Prof: Marcelo Leseigneur
Aux: Sebastián Bustamante F. & Víctor Verdugo S.

Fecha de entrega: Viernes 29 de Octubre.

P1. Sea $F(x,y) = f(\frac{y}{x^2-y^2})$, donde f es una función real derivable. Verifique que

$$(x^2+y^2)\frac{\partial F}{\partial x} + 2xy\frac{\partial F}{\partial y} = 0.$$

P2. Sea $F(u,v) = f(uv, \frac{u^2-v^2}{2})$, donde $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una función diferenciable. Verifique que

$$(u^2+v^2)\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right] = \left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial v}\right)^2$$

P3. Sean $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ y : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos funciones diferenciables en sus dominios, tales que

$$F(x, y(x)) = 0 \quad \forall x \in D.$$

Demuestre que

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y(x)) + \frac{\partial F}{\partial y}(x,y(x))\frac{dy}{dx}(x) = 0$$

y que además, si $\frac{\partial F}{\partial x}(x,y(x)) \neq 0$ entonces se tiene que

$$\frac{dy}{dx}(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,y(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x,y(x))}.$$

P4. Verifique que la función $u = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ es una solución de la ecuación de Laplace en tres dimensiones:

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0.$$

P5. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciable. Suponga que

$$\langle x, \nabla f(x)\rangle = rf(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, r \in \mathbb{R}.$$

Se pide:

(i) Muestre que $t\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx)x_i = rf(tx) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$

(ii) Calcule $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{f(tx)}{t^r}\right)$.

(iii) Concluya que $f(tx) = t^r f(x) \quad \forall t \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall r \in \mathbb{R}.$

(iv) Considere ahora una función $f(x,y)$ de clase $C^r(\mathbb{R}^2)$ homogenea de grado p, es decir,

$$f(tx,ty)=t^p f(x,y).$$

Pruebe con inducción que

$$\sum_{k=0}^{r}\binom{r}{k}x^{r-k}y^k\frac{\partial^r f}{\partial x^{r-k}y^k}=p(p-1)\cdots(p-(r-1))f.$$

P6. Sea A una matriz cualquiera de $m\times n$ y $b\in\mathbb{R}^m$. Se define $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ por:

$$f(x)=\|Ax-b\|_2^2.$$

Muestre que f es diferenciable y calcule $\nabla f(x)$.

P7. Sea $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}.$$

Determine aquellos $v\in\mathbb{R}^2$ para los cuales existe $Df((0,0);v)$ y estudie la diferenciabilidad de f en $(0,0)$.

P8. Si $u=e^{a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n}$, donde $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2=1$, muestre que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+\cdots+\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}=u.$$

P9. Considere $v:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ definida por

$$v(x)=\|x\|^{2-n}u\left(\frac{x}{\|x\|^2}\right)$$

para $x\neq 0$, $u:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n)$, con $\|\cdot\|$ la norma 2 en $\mathbb{R}^n$.
Demostrar que

$$\nabla v(x)=\frac{1}{\|x\|^{n+2}}\nabla u\left(\frac{x}{\|x\|^2}\right).$$

P10. Si $u=x^4y+y^2z^3$, donde $x=rse^{-t}, z=r^2s\operatorname{sen}t$, calcular el valor de $\dfrac{\partial u}{\partial s}$ cuando $r=2, s=1, t=0$.

P11. Supongamos que $f(u,v)$ satisface la ecuación de Laplace $\dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial v^2}=0$. Pongamos $u=u(x,y), v=v(x,y)$ y supongamos que $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}, \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}$. Probar que la función $f(u(x,y),v(x,y))$ también satisface la ecuación de Laplace.

P12. Sea $\rho(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Probar que $\dfrac{\partial^2\rho}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2\rho}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2\rho}{\partial y^2}=\dfrac{2}{\rho}$.

P13. Supongamos que una función f verifica la ecuación diferencial

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=\alpha\sqrt{x^2+y^2}.$$

Obtener la ecuación diferencial que satisface la función $g(\rho,\theta)=f(\rho\cos\theta,\rho\operatorname{sen}\theta)$.

P14. Supongamos que la igualdad $F(x,y,z)=0$ determina implícitamente funciones diferenciables $x=x(y,z), y=y(x,z), z=z(x,y)$. Probar que $\dfrac{\partial x}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial x}=-1$.

P15. Determinar y clasificar los extremos de la función $f(x,y,z) = z$ sujetos a la restricción $g(x,y,z) = z + e^z + 2x + 2y - x^2 - y^2 - 3 = 0$.

P16. Determinar los extremos absolutos de f sobre el conjunto M:

a) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ f(x,y,z) = 2x^2 + y^2 + z^2 - xy,$

$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{8} \leq 1\}$$

b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{2} + xy,$

$$M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y - x^2 \geq -1, x \leq 0, y \leq 0\}$$

c) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) = x^2 + 3y^2 + x,$

$$M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$$

d) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) = e^{x^2-y^2},$

$$M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

P17. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida como $f(x) = \sum_{i=1}^n b_i x_i^2$ donde $b_i > 0,\ i = 1, 2, \ldots, n$. Sea $a \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ y sea M el hiperplano $M = \{x \in \mathbb{R} : a \cdot x = 1\}$. Estudiar los extremos de f en M.

P18. Dos superficies se llaman ortogonales en un punto de intersección si sus rectas normales son perpendiculares en ese punto. Muestre que las superficies con ecuaciones $F(x,y,z) = 0$ y $G(x,y,z) = 0$ son ortogonales en el punto P, donde $\nabla F \neq 0$ y $\nabla G \neq 0$, si y sólo si

$$F_x G_x + F_y G_y + F_z G_z = 0$$

en P.

P19. Encuentre los puntos de $\mathbb{R}^3$ donde se alcanzan las máximas y mínimas distancias del origen a la superficie de ecuación:

$$\frac{x^4}{a^4} + \frac{y^4}{b^4} + \frac{z^4}{c^4} = 1, \quad \text{con } a > b > c > 0.$$

¿Tienen solución estos problemas? ¿Por qué? Justifique sus respuestas geométricamente.

P20. Encuentre la derivada direccional de la función en el punto dado, en la dirección del vector v.

a) $f(x,y) = \sqrt{x-y},\ (5,1),\ v = (12,5)$.

b) $f(x,y) = \frac{x}{y},\ (6,-2),\ v = (-1,3)$.

c) $f(x,y) = xe^{xy},\ (-3,0),\ v = (2,3)$.

d) $f(x,y,z) = \sqrt{xyz},\ (2,4,2),\ v = (4,2,-4)$.

e) $f(x,y,z) = z^3 - x^2 y,\ (1,6,2),\ v = (3,4,12)$.

f) $f(x,y,z) = x \arctan(\frac{y}{z}),\ (1,2,-2),\ v = (1,1,-1)$.

g) $f(x,y,z) = xe^{yz} + xye^z,\ (-2,1,1),\ v = (1,-2,3)$.