

Técnicas Matemáticas de Resolución de Problemas

Curso 2005/2006

Escuela Universitaria de Ingeniería Técnica Agrícola

Departamento de Matemática Aplicada I

Derivación

6 Derivadas

Ejercicio 6.1 Calcular la derivada de las siguientes funciones:

- (a.) $y = x^3$ (b.) $y = x^8$ (c.) $y = 7x^5$ (d.) $y = \frac{3}{4}x^4$
(e.) $y = 11x^8$ (f.) $y = x^{10} - x^7 + x^4$ (g.) $y = x^{12} + x^6 - x^3$
(h.) $y = x^7 + x^4 - x$ (i.) $y = 10x^8 + 4x^4 - 5x$ (j.) $y = 15x^6 + 9x^3 - 2$
(k.) $y = 5x^6 + 4x^5 - 7x^2 + 9x - 12$ (l.) $y = 8x^9 - 2x^5 - 2x^4 + 2x + 19$
(m.) $y = 3x^7 - 3x^5 + 12x^4 - 4x - 9$ (n.) $y = x^{-7}$ (o.) $y = x^{-2}$
(p.) $y = x^{\frac{1}{3}}$ (q.) $y = \frac{1}{x^4}$ (r.) $y = \sqrt{x}$ (s.) $y = \sqrt[3]{x}$
(t.) $y = \sqrt[3]{x^2}$ (u.) $y = \sqrt[4]{x^3}$ (v.) $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ (w.) $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$
(x.) $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x^5}}$ (y.) $y = \frac{1}{\sqrt[7]{x^4}}$ (z.) $y = \frac{\sqrt{x^3}}{\sqrt[3]{x^2}}$

Ejercicio 6.2 Calcular la derivada de las siguientes funciones:

- (a.) $y = \frac{x^2-3}{x^3-x}$ (b.) $y = \frac{x^3-3x^2}{x^2-x}$ (c.) $y = \frac{x-5}{x^3+x}$ (d.) $y = \frac{x^2+1}{x^3+1}$
(e.) $y = \frac{x^4+x}{2x^2+1}$ (f.) $y = \frac{3x^3+1}{x^4+1}$ (g.) $y = \frac{2x+5}{x^3+x}$ (h.) $y = \frac{x-5}{x^3-x}$
(i.) $y = \frac{x-1}{x^3}$ (j.) $y = \ln(3x)$ (k.) $y = \ln(x^3)$ (l.) $y = \ln|\sqrt{x}|$
(m.) $y = \ln(x^2 + 1)$ (n.) $y = \ln(2x^3 + 3x + 1)$
(o.) $y = \ln(5x^4 - 2x + 5)$ (p.) $y = \ln(3x^5 - x + 4)$
(q.) $y = \ln(x^6 + x^4 + 2x^3 - 7)$ (r.) $y = 3^x$ (s.) $y = 5^x \cdot 7^x$
(t.) $y = \frac{3^x}{6^x}$ (u.) $y = e^{3x+1}$ (v.) $y = e^{x^2+x+1}$ (w.) $y = 7^{3x+1}$
(x.) $y = 25^{x^4+x+1}$ (y.) $y = 14^{1-x^2}$ (z.) $y = 2^{x^3+x^2-1}$

Ejercicio 6.3 Calcular la derivada de las siguientes funciones:

- (a.) $y = \operatorname{sen}(3x + 1)$ (b.) $y = \operatorname{sen}(x^2 + 1)$ (c.) $y = \operatorname{sen}(5x^4 + 7x + 1)$
(d.) $y = \operatorname{sen}(3x^4 + 8)$ (e.) $y = \operatorname{sen}(x^3)$ (f.) $y = \operatorname{sen}(\ln x)$
(g.) $y = 3\operatorname{sen}(x)$ (h.) $y = \frac{\operatorname{sen}(x)}{3}$ (i.) $y = \operatorname{sen}(\operatorname{sen}(x))$
(j.) $y = \operatorname{sen}(3^x)$ (k.) $y = 7\cos(x)$ (l.) $y = \frac{\cos(x)}{5}$
(m.) $y = \cos(3x + 1)$ (n.) $y = \cos(x^2 + 1)$ (o.) $y = \cos(5x^2 + 7x + 1)$
(p.) $y = \cos(5x^4 - 7x^2)$ (q.) $y = \cos(x^3)$ (r.) $y = \cos(\ln(x))$
(s.) $y = \cos(\cos(x))$ (t.) $y = \cos(3^x)$ (u.) $y = \operatorname{arcsen}(\sqrt{x})$
(v.) $y = \operatorname{arcsen}(x^2)$ (w.) $y = 7\operatorname{arctg}(x)$ (x.) $y = \frac{\operatorname{arctg}(x)}{5}$
(y.) $y = \operatorname{arctg}(2x + 1)$ (z.) $y = \operatorname{arctg}(3x^2 + x)$

Ejercicio 6.4 Calcular la derivada de las siguientes funciones:

- (a.) $y = \arctg(x^2)$ (b.) $y = \arctg(\ln(x))$ (c.) $y = \arctg(x^2 + x)^7$
 (d.) $y = (2x^2 + x^3)^6$ (e.) $y = (10x^3 + 8x^4 + x)^{10}$ (f.) $y = (2x^{15} + 2x^3)^{-8}$
 (g.) $y = \sqrt[3]{8x^{-3} + 2x^{-2}}$ (h.) $y = \frac{1}{\sqrt{10x^3 + x^6}}$ (i.) $y = \frac{k}{\sqrt[3]{2x^5 + 8x}}$
 (j.) $y = \sqrt[10]{7x^5 + 2x^2}$ (k.) $y = \sqrt{10x^{12} + x - 3}$ (l.) $y = \sqrt[3]{3x^6 - 2x}$
 (m.) $y = \frac{5}{\sqrt[6]{(3x^5 - 2x)^5}}$ (n.) $y = (10x^4 + 8x^3)(5x^2 + 2x)$
 (o.) $y = (40x^3 + 24x^2)(5x^2 + 2x) + (10x^4 + 8x^3)(10x + 2)$
 (p.) $y = (7x^{-3} + 2x^{\frac{1}{3}})(8x^{\frac{3}{4}} - 2x^5)$ (q.) $y = (3x^{-2} + x)(10x^4 + 8)(3x^3 + 2x)$
 (r.) $y = (4x^3 + 2x)(\sqrt{x} + 2\sqrt{x^3})(8x^5 + 2x)$ (s.) $y = \frac{3x^{-5}}{8x^2 + 5x}$
 (t.) $y = \frac{30x^3 + 2x^4}{10x^2 + 8}$ (u.) $y = \frac{10x^3 + 2x}{8x^5 - 7x^3}$ (v.) $y = \frac{x^3}{x^4 + 8}$ (w.) $y = \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x^2 + 3}}$
 (x.) $y = \frac{(x-2)^2}{\sqrt{x+5}}$ (y.) $y = \frac{(3x^2 - 2)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt[3]{x^2 + 5x}}$ (z.) $y = 3 \cdot 2^x$

Ejercicio 6.5 Calcular la derivada de las siguientes funciones:

- (a.) $y = (\ln 8)^x$ (b.) $y = 10^{5x^4 + x}$ (c.) $y = 8^{3x^6 - 2x}$
 (d.) $y = 3^{\ln(x) + x^5}$ (e.) $y = 10^{(3x^6 + 2x)^4}$ (f.) $y = 3^{2^x}$ (g.) $y = 8^{\ln(x)}$
 (h.) $y = e^{\sqrt{x^3 + \ln(x) + e^x}}$ (i.) $y = e^{3x^4 + \ln(x)}$ (j.) $y = \frac{x^4 + 2x^3 - 2}{x^4 - 2x}$
 (k.) $y = \frac{(2x^3 + 2x^5)^3}{3x^3 + 2x}$ (l.) $y = \frac{8^x + e^x - \ln(x)}{5x^2 + \ln(x^3) - e^{x^4}}$ (m.) $y = (x^3 + 1)\sqrt{x^2 - 1}$
 (n.) $y = \ln(\sqrt{\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}})$ (o.) $y = (5x^3 + 2x) \cdot 10^x$ (p.) $y = 5^x \ln(x)$
 (q.) $y = \sqrt{(x-1)(8+x)}$ (r.) $y = (3x + 2x^3 - 5x^2)^{\frac{3}{4}} \cdot e^{\ln(x) + e^x}$
 (s.) $y = \arcsen(\ln(x))$ (t.) $y = \frac{(3x^2 + e^{-x})(\ln(e^{x^2}) + 2)}{\sqrt{5x - \ln(x^2)}}$ (u.) $y = \sen(\sqrt{\ln(x) + \sqrt{x}})$
 (v.) $y = \arctg(x \sen(x))$ (w.) $y = \sen(x + \sen(x^2 - 5x)^2)$
 (x.) $y = \sen(x) - \sen\sqrt{x^3 + 2}$ (y.) $y = \cos\sqrt{3x^2 - e^{2x}}$

Ejercicio 6.6 Calcula la derivada de las siguientes funciones:

- (a.) $y = \frac{3-2x}{3+2x}$ (b.) $y = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$ (c.) $y = \sqrt{1 + \sqrt{x}}$
 (d.) $y = (x-a)\sqrt{2ax - x^2} + a^2 \arcsen(\frac{x-a}{a})$ (e.) $y = \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x^2} + \frac{1}{2} \arcsen(\frac{x}{2})$
 (f.) $y = x \sen(\frac{1}{x}) + \sqrt{1 - x^2}$ (g.) $y = \arctg(\frac{1+x}{1-x})$
 (h.) $y = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$ (i.) $y = \ln(\ln(\tg(x)))$
 (j.) $y = x[\sen(\ln(x)) - \cos(\ln(x))]$ (k.) $y = \arctg(\sen(\ln(\cos(x))))$
 (l.) $y = \frac{e^x(1-e^x)}{\ln(1-x)}$ (m.) $y = \tg(x^{\cos x})$ (n.) $y = \cos(x^{\tg(x)})$
 (o.) $y = (e^x)^{e^x}$ (p.) $y = x^{x^x}$ (q.) $y = \sqrt{\sqrt{\sqrt{x}}}$
 (r.) $y = (\arctg(x))^{\arctg(x)}$ (s.) $y = \ln(\arctg(x) + e^x - \sen(\cos(x)))$
 (t.) $y = \tg(\tg(\tg(x)))$ (u.) $y = \frac{\tg(x)}{\sen(x) - \cos(x)}$ (v.) $y = x\sqrt{\sen(x) + \cos(x)}$

$$(w.) \ y = \frac{x^2+1}{x \sin(x)} \quad (x.) \ y = \sqrt{\frac{2x+5}{3-x}} \quad (y.) \ y = \cos^2(\cos(\cos(x)))$$

Solución 6.1 a.) $3x^2$; b.) $8x^7$; c.) $35x^4$; d.) $3x^3$; e.) $88x^7$; f.) $10x^9 - 7x^6 + 4x^3$ g.) $12x^{11} + 6x^5 - 3x^2$; h.) $7x^6 + 4x^3 - 1$; i.) $80x^7 + 16x^3 - 5$; j.) $90x^5 + 27x^2$; k.) $30x^5 + 20x^4 - 14x + 9$; l.) $72x^8 - 10x^4 - 8x^3 + 2$; m.) $21x^6 - 15x^4 + 43x^3 - 4$; n.) $\frac{-7}{x^8}$; o.) $\frac{-2}{x^3}$; p.) $\frac{1}{3x^{2/3}}$; q.) $\frac{-4}{x^5}$; r.) $\frac{1}{2\sqrt{x}}$; s.) $\frac{1}{3x^{2/3}}$; t.) $\frac{2}{3x^{1/3}}$; u.) $\frac{3}{4x^{1/4}}$; v.) $\frac{-1}{2x^{3/2}}$; w.) $\frac{-1}{3x^{4/3}}$; x.) $\frac{-5}{3x^{8/3}}$; y.) $\frac{-4}{7x^{11/7}}$; z.) $\frac{5}{6x^{1/6}}$

Solución 6.2 a.) $\frac{-(x^4 - 8x^2 + 3)}{x^2(x^2 - 1)^2}$; b.) $\frac{x^2 - 2x + 3}{(x - 1)^2}$; c.) $\frac{-(2x^3 - 15x^2 - 5)}{x^2(x^2 + 1)^2}$; d.) $\frac{-x(x^3 + 3x - 2)}{(x^3 + 1)^2}$; e.) $\frac{4x^5 + 4x^3 - 2x^2 + 1}{(2x^2 + 1)^2}$; f.) $\frac{-x^2(3x^4 + 4x - 9)}{(x^4 + 1)^2}$; g.) $\frac{-(4x^3 + 15x^2 + 5)}{x^2(x^2 + 1)^2}$; h.) $\frac{-(2x^3 - 15x^2 + 5)}{x^2(x^2 - 1)^2}$; i.) $\frac{3 - 2x}{x^4}$; j.) $\frac{1}{x}$; k.) $\frac{3}{x}$; l.) $\frac{1}{2x}$; m.) $\frac{2x}{x^2 + 1}$; n.) $\frac{3(2x^2 + 1)}{2x^3 + 3x + 1}$; o.) $\frac{2(10x^3 - 1)}{5x^4 - 2x + 5}$; p.) $\frac{15x^4 - 1}{3x^5 - x + 4}$; q.) $\frac{2x^2(3x^3 + 2x + 3)}{x^6 + x^4 + 2x^3 - 7}$; r.) $3^x \ln(3)$; s.) $35^x \ln(35)$; t.) $-2^{-x} \ln(2)$; u.) $3e^{3x-1}$; v.) $e^{x^2+x}(2ex + e)$; w.) $3 \cdot 7^{3x+1} \ln(7)$; x.) $2 \cdot 5^{2(x^4+x+1)}(4x^3 + 1)2 \ln(5)$; y.) $-2^{2-x^2}7^{1-x^2}x \ln(14)$; z.) $2^{x^3+x^2-1}x(3x + 2) \ln(2)$

Solución 6.3 a.) $3 \cos(3x + 1)$; b.) $2x \cos(x^2 + 1)$; c.) $(20x^3 + 7) \cos(5x^4 + 7x + 1)$; d.) $12x^3 \cos(3x^4 + 8)$; e.) $3x^2 \cos(x^3)$; f.) $\frac{\cos(\ln(x))}{x}$; g.) $3 \cos(x)$; h.) $\frac{\cos(x)}{3}$; i.) $\cos(x) \cos(\sin(x))$; j.) $3^x \ln(3) \cos(3^x)$; k.) $-7 \sin(x)$; l.) $\frac{-\sin(x)}{5}$; m.) $-3 \sin(3x + 1)$; n.) $-2x \sin(x^2 + 1)$; o.) $-(10x + 7) \sin(5x^2 + 7x + 1)$; p.) $2x(7 - 10x^2) \sin(5x^4 - 7x^2)$; q.) $-3x^2 \sin(x^3)$; r.) $\frac{-\sin(\ln(x))}{x}$; s.) $\sin(x) \sin(\cos(x))$; t.) $-3^x \ln(3) \sin(3^x)$; u.) $\frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}}$; v.) $\frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$; w.) $\frac{7}{x^2 + 1}$; x.) $\frac{1}{5(x^2 + 1)}$; y.) $\frac{1}{2x^2 + 2x + 1}$; z.) $\frac{6x + 1}{9x^4 + 6x^3 + x^2 + 1}$

Solución 6.4 a.) $\frac{2x}{x^4 + 1}$; b.) $\frac{1}{x(\ln(x)^2 + 1)}$; d.) $6x^{11}(x + 2)^5(3x + 4)$; e.) $10x^9(8x^3 + 10x^2 + 1)^9(32x^3 + 30x^2 + 1)$; f.) $\frac{-3(5x^{12} + 1)}{32x^{25}(x^{12} + 1)^9}$; g.) $\frac{-2^{4/3}(x + 6)(x + 4)^{1/3}}{3x^2(x + 4)}$; h.) $\frac{-3(x^3 + 5)\sqrt{x^3(x^3 + 10)}}{x^4(x^3 + 10)^2}$; i.) $\frac{-2^{2/3}k(5x^4 + 4)}{6x^{4/3}(x^4 + 4)^{4/3}}$; j.) $\frac{x(35x^3 + 4)}{10(7x^3 + 2)^{9/10}x^{9/5}}$; k.) $\frac{20x + 1}{2\sqrt{10x^2 + x - 3}}$; l.) $\frac{2(9x^5 - 1)}{3(x(3x^5 - 2))^{2/3}}$; m.) $\frac{25(2 - 15x^4)}{6(x(3x^4 - 2))^{11/6}}$; n.) $4x^3(75x^2 + 75x + 16)$;

o.) $12x^2(125x^2 + 100x + 16)$; p.) $\frac{-2(32x^{91/12} + 42x^{17/4} - 26x^{10/3} + 189)}{3x^{13/4}}$;
q.) $\frac{2(120x^9 + 60x^7 + 225x^6 + 48x^5 + 90x^4 + 16x^3 + 36x^2 - 24)}{x^2}$;
r.) $2x^{3/2}(304x^7 + 136x^6 + 120x^5 + 52x^4 + 44x^3 + 18x^2 + 14x + 5)$; s.) $\frac{-6(28x + 15)}{x^7(8x + 5)^2}$;
t.) $\frac{x^2(10x^3 + 75x^2 + 16x + 180)}{(5x^2 + 4)^2}$; u.) $\frac{-4(40x^4 + 16x^2 - 7)}{x^3(8x^2 - 7)^2}$; v.) $\frac{3x^2(3x^{3/4} + 32)}{4(x^{3/4} + 8)^2}$;
w.) $\frac{-(x^{2/3} + 8x^{1/6} - 9)}{6\sqrt{x}(x^{2/3} + 3)^2}$; x.) $\frac{(x - 2)(3x + 22)}{2(x + 5)^{3/2}}$; y.) $\frac{\sqrt{3x^2 - 2}(21x^3 + 120x^2 + 4x + 10)}{3(x(x + 5))^{4/3}}$;
z.) $3 \cdot 2^x \ln(2)$

Solución 6.5 a.) $(3 \ln(2))^x \ln(3 \ln(2))$; b.) $10^{x(5x^3+1)}(20x^3 + 1) \ln(10)$;
c.) $3 \cdot 2^{9x^6-6x+1}(9x^5 - 1) \ln(2)$; d.) $3^{x^5} x^{\ln(3)-1}(5x^5 + 1) \ln(3)$; f.) $2^x 3^{2^x} \ln(2) \ln(3)$;
g.) $3x^{3 \ln(2)-1} \ln(2)$; h.) $\frac{e^{(e^x + \ln(x) + x^3)^{1/4}}(xe^x + 3x^3 + 1)}{4x(e^x + \ln(x) + x^3)^{3/4}}$; i.) $e^{3x^4}(12x^4 + 1)$;
j.) $\frac{-2(x^6 + 3x^4 + 2)}{x^2(x^3 - 2)^2}$; k.) $\frac{16x^7(x^2 + 1)^2(18x^4 + 23x^2 + 8)}{(3x^2 + 2)^2}$; m.) $\frac{x(7x^3 - 6x + 1)}{2(x^2 - 1)^{3/4}}$;
n.) $\frac{1}{2\sqrt{x}(1 - x)}$; o.) $10^x((5x^3 + 2x) \ln(10) + 15x^2 + 2)$; p.) $5^x(\ln(5) \ln(x) + \frac{1}{x})$;
q.) $\frac{2x + 7}{2\sqrt{x^2 + 7x - 8}}$; r.) $e^x + \frac{(26x^2 - 50x + 21)(x(2x^2 - 5x + 3))^{3/4}}{4(2x^2 - 5x + 3)}$; s.) $\frac{1}{x\sqrt{1 - \ln(x)^2}}$;
u.) $\frac{(\sqrt{x} + 2) \cos(\sqrt{\ln(x) + \sqrt{x}})}{4x\sqrt{\ln(x) + \sqrt{x}}}$; v.) $\frac{x \cos(x) + \sin(x)}{x^2 \sin(x)^2 + 1}$;
w.) $\cos(\sin(x^4 - 10x^3 + 25x^2) + x)((4x^3 - 30x^2 + 50x) \cos(x^4 - 10x^3 + 25x^2) + 1)$;
x.) $\cos(x) - \frac{3x^2 \cos(\sqrt{x^3 + 2})}{2\sqrt{x^3 + 2}}$; y.) $\frac{(e^{2x} - 3x) \sin(\sqrt{3x^2 - e^{2x}})}{\sqrt{3x^2 - e^{2x}}}$

Solución 6.6 a.) $\frac{-12}{(2x + 3)^2}$; b.) $\frac{1}{(x+1)(x-1)} \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$; c.) $\frac{1}{4\sqrt{x}\sqrt{\sqrt{x}+1}}$;
d.) $\frac{a^2}{\sqrt{x(2a-x)}} + \sqrt{x(2a-x)} - \frac{(x-a)^2}{\sqrt{x(2a-x)}}$; e.) $\frac{1}{2\sqrt{4-x^2}} - \frac{x^2-8}{x^3\sqrt{x^2-4}}$;
f.) $\frac{-\cos(1/x)}{x} + \sin(1/x) - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$; g.) $\frac{1}{x^2+1}$; h.) $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$;
i.) $\frac{1}{\sin(x) \cos(x) \ln(\tan(x))}$; j.) $2 \sin(\ln(x))$; k.) $\frac{-\tan(x) \cos(\ln(\cos(x)))}{\sin(\ln(\cos(x)))^2 + 1}$;
l.) $\frac{e^{2x}(2(x-1) \ln(1-x) - 1)}{(1-x) \ln(1-x)^2} + \frac{e^x((x-1) \ln(1-x) - 1)}{(x-1) \ln(1-x)^2}$;
m.) $x^{\cos(x)-1}(\frac{\cos(x)}{\cos(x^{\cos(x)})^2} - \frac{x \sin(x) \ln(x)}{\cos(x^{\cos(x)})^2})$;

$$\begin{aligned}
\text{n.) } & -x^{\frac{\sin(x)-\cos(x)}{\cos(x)}} \left(\frac{x \ln(x) \sin(x^{\tan(x)})}{\cos(x)^2} + \tan(x) \sin(x^{\tan(x)}) \right); \text{ o.) } e^{xe^x+x}(x+1); \\
\text{p.) } & x^{x^x} x^{x-1} (x \ln(x)^2 + x \ln(x) + 1); \text{ q.) } \frac{1}{16x^{15/16}}; \\
\text{r.) } & \arctan(x)^{\arctan(x)} \left(\frac{\ln(\arctan(x))}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1} \right); \\
\text{s.) } & \frac{e^x(x^2+1) + (x^2+1) \sin(x) \cos(\cos(x)) + 1}{(x^2+1)(\arctan(x) + e^x - \sin(\cos(x)))}; \\
\text{t.) } & \frac{1}{\cos(x)^2 \cos(\tan(x))^2 \cos(\tan(\tan(x)))^2}; \text{ u.) } \frac{\sin(x)^3 - \cos(x)(\sin(x)^2 + 1)}{\cos(x)^2 (\cos(x) - \sin(x))^2}; \\
\text{v.) } & \frac{x(\cos(x) \sin(x))}{2\sqrt{\cos(x) + \sin(x)}} + \sqrt{\cos(x) + \sin(x)}; \text{ w.) } \frac{x^2 - 1}{x^2 \sin(x)} - \frac{(x^2 + 1) \cos(x)}{x \sin(x)^2}; \\
\text{x.) } & \frac{11}{2(3-x)(2x+5)} \sqrt{\frac{2x+5}{3-x}}; \text{ y.) } -2 \sin(x) \sin(\cos(x)) \sin(\cos(\cos(x))) \cos(\cos(\cos(x)))
\end{aligned}$$