MA2001-1 Cálculo en Varias Variables. Semestre 2010-2

Profesor: Marcelo Leseigneur Auxiliares: Víctor Verdugo y Sebastián Bustamante

Control 1

Miércoles 29 de Septiembre 2010

P1. i) Comente las siguientes afirmaciones. En caso que alguna sea verdadera, demuéstrelo y si fuera falsa de un contraejemplo.

a) **(0.5 pts)** Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ continua y $Gr(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m : f(x) = y\}$. Entonces $Gr(f)$ es cerrado.

Consideremos $(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset Gr(f)$ tal que $(x_n, y_n) \rightarrow (x, y)$. Dado que $x_n \rightarrow x$ y como f es continua tenemos que $y_n = f(x_n) \rightarrow f(x)$. Luego, por unicidad del límite se concluye que $f(x) = y$, y por lo tanto $(x, y) \in Gr(f)$, es decir, $Gr(f)$ es cerrado.

b) **(0.5 pts)** Sea $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ un evn y $A, B \subset \mathbb{R}^n$. Si $A \subset B$, entonces $\partial A \subset \partial B$.

Indicación: Recuerde que $\partial A = \overline{A} \cap \overline{A}^c$.

Consideremos $A = \mathbb{Q}$ y $B = \mathbb{R}$. En este caso, $\partial \mathbb{Q} = \overline{\mathbb{Q}} \cap \overline{\mathbb{Q}}^c = \mathbb{R}$ y $\partial \mathbb{R} = \overline{\mathbb{R}} \cap \overline{\mathbb{R}}^c = \emptyset$. Luego, claramente $A \subset B$ pero $\partial A \not\subset \partial B$.

c) **(0.5 pts)** Sea $I : (\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}), \|\cdot\|_1) \rightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|)$ definida por $I(f) = \int_a^b f(x)dx$. Entonces I es un operador lineal continuo.

Claramente I es un operador lineal. En efecto, dados $f, g \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$:

$$I(f + \lambda g) = \int_a^b (f(x) + \lambda g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \lambda \int_a^b g(x)dx = I(f) + \lambda I(g)$$

Además se satisface que:

$$|I(f)| = \left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx = \|f\|_1$$

y por lo tanto, se concluye que $I : (\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}), \|\cdot\|_1) \rightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|)$ es un operador lineal continuo.

d) **(0.5 pts)** Pruebe que toda norma $\|\cdot\|$ en $\mathbb{R}$ es de la forma $\|x\| = \alpha|x|$, donde $\alpha > 0$ y $|\cdot|$ es la función valor absoluto. Concluya que toda norma en $\mathbb{R}$ proviene de un producto interno. Determinélo.

Dado que $\|\cdot\|$ es una norma en $\mathbb{R}$, se satisface que $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$, pero como $x \in \mathbb{R}$ es un escalar, también se satisface que $\|\alpha x\| = |x|\|\alpha\|$, y por lo tanto $|\alpha|\|x\| = |x|\|\alpha\| = |x|\|\alpha\|\|1\|$, de donde se concluye que $\|x\| = \|1\|\|x\| = \gamma|x|$, con $\gamma = \|1\| > 0$, es decir, las normas en $\mathbb{R}$ son ponderaciones por escalares positivos de la norma del valor absoluto. El producto interno que induce esta norma es $\langle x, x \rangle = (\gamma x)^2$.

e) **(0.5 pts)** Si $A = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i \in \mathbb{Q}, \forall 1 \leq i \leq n\}$ explicita $\overline{A}$, $\text{int } A$ y ∂A .

Podemos notar que $A = \mathbb{Q}^n$. Luego, $\text{int } A = \text{int } \mathbb{Q}^n = (\text{int } \mathbb{Q})^n = \emptyset$ y $\overline{A} = \overline{\mathbb{Q}^n} = (\overline{\mathbb{Q}})^n = \mathbb{R}^n$. La frontera se encuentra directamente usando que $\partial A = \overline{A} \setminus \text{int } A = \mathbb{R}^n$.

f) **(0.5 pts)** Si $A \subset \mathbb{R}^n$ es un cerrado o un abierto, entonces $\text{int } (\partial A) = \emptyset$. ¿Es cierto este resultado para cualquier conjunto A ? Pruébalo o de un contraejemplo.

Esto es falso, pues si consideramos $A = \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ (el cual no es cerrado ni abierto), entonces $\text{int } \partial A = \text{int } \partial \mathbb{Q} = \text{int } \mathbb{R} = \mathbb{R} \neq \emptyset$.

ii) Sea $E = \mathbb{R}[X]$ el espacio de los polinomios coeficientes reales. Considere las siguientes aplicaciones, donde

$$p(x) = \sum_{i=0}^q a_i x^i :$$

$$\begin{aligned} N_\infty : E &\rightarrow \mathbb{R}_+ \\ p &\mapsto N_\infty(p) = \sup_{0 \leq i \leq q} |a_i| \\ \Phi : E &\rightarrow \mathbb{R} \\ p &\mapsto \Phi(p) = p(1) \end{aligned}$$

a) **(1 pto)** Pruebe que (E, N_∞) es un espacio vectorial normado.

Es directo que E es un espacio vectorial. Probemos que N_∞ es una norma en E . En efecto:

- Si $p(x) = \sum_{i=0}^q a_i x^i$, entonces $N_\infty(p) = \sup_{0 \leq i \leq q} |a_i| < +\infty$, pues se está tomando supremo sobre un conjunto finito de reales.

- Claramente si $p = 0$ entonces $N_\infty(0) = 0$. Ahora supongamos que $N_\infty(p) = 0$, con $p(x) = \sum_{i=0}^q a_i x^i$.

Luego, $0 \leq \sup_{0 \leq i \leq q} |a_i| = 0$, es decir $a_i = 0$ para todo $i \in \{1, \dots, q\}$ y por lo tanto $p(x) = \sum_{i=0}^q a_i x^i = 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Se concluye entonces que p debe ser el polinomio idénticamente nulo.

- Si $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces $N_\infty(\lambda p) = \sup_{0 \leq i \leq q} |\lambda a_i| = |\lambda| \sup_{0 \leq i \leq q} |a_i| = |\lambda| N_\infty(p)$.

- Resta probar la desigualdad triangular. Dados $p, q \in E$, con $p(x) = \sum_{i=0}^m a_i x^i$ y $q(x) = \sum_{i=0}^n b_i x^i$ asumamos sin pérdida de generalidad que $gr(p) = m \geq gr(q) = n$. Luego, tenemos que $(p+q)(x) = \sum_{i=0}^m c_i x^i$, donde $c_i = a_i + b_i$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$ y $c_i = a_i$ para $i \in \{n+1, \dots, m\}$. Luego:

$$|c_i| = |a_i + b_i| \leq |a_i| + |b_i| \Rightarrow |c_i| - |a_i| \leq |b_i| \leq \sup_{1 \leq i \leq n} |b_i| = N_\infty(q)$$

De igual manera tenemos que

$$|c_i| - N_\infty(q) \leq |a_i| \leq \sup_{1 \leq i \leq m} |a_i| = N_\infty(p)$$

y por lo tanto $|c_i| \leq N_\infty(p) + N_\infty(q)$ para todo $i \in \{1, \dots, m\}$ y tomando supremo se concluye que $N_\infty(p+q) \leq N_\infty(p) + N_\infty(q)$.

b) **(0.5 ptos)** Pruebe que Φ es lineal.

Sean $p, q \in E$ con $p(x) = \sum_{i=0}^m a_i x^i$ y $q(x) = \sum_{i=0}^n b_i x^i$. Luego, asumiendo que $gr(p) = m \geq gr(q) = n$ tenemos que $(p + \lambda q)(x) = \sum_{i=0}^m c_i x^i$, donde $c_i = a_i + \lambda b_i$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$ y $c_i = a_i$ para $i \in \{n+1, \dots, m\}$. Luego:

$$\begin{aligned} \Phi(p + \lambda q) &= (p + \lambda q)(1) \\ &= \sum_{i=1}^m c_i \\ &= \sum_{i=1}^m a_i + \sum_{i=1}^n \lambda b_i \\ &= \sum_{i=1}^m a_i + \lambda \sum_{i=1}^n b_i \\ &= \Phi(p) + \lambda \Phi(q) \end{aligned}$$

c) **(0.5 ptos)** Considere la familia de polinomios $p_n(x) = x + x^2 + \dots + x^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Calcule $\Phi(p_n)$ y $N_\infty(p_n)$.

$$\Phi(p_n) = p_n(1) = 1 + 1^2 + \dots + 1^n = n \text{ y } N_\infty(p_n) = \sup_{0 \leq i \leq n} |1| = 1.$$

d) **(1 pto)** Deduzca que $\Phi : (E, N_\infty) \rightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|)$ no es continua.

Por un lado tenemos que $N_\infty(p_n - 1) \rightarrow 0$, donde 1 es el polinomio constante igual a 1. Pero $\Phi(p_n) = n \rightarrow +\infty \neq \Phi(1)$ y por lo tanto $\Phi : (E, N_\infty) \rightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|)$ no es continua.

P2. i) Sea $\ell : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ una función lineal, donde los conjuntos de partida y llegada están dotados de alguna norma.

a) **(1 pto)** Demuestre que existe $M > 0$ tal que $\|\ell(u) - \ell(v)\| \leq M\|u - v\|$, para todo $u, v \in \mathbb{R}^n$.

Sea $\{e_1, \dots, e_n\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^n$. Entonces:

$$\begin{aligned} \|\ell(u) - \ell(v)\| &= \left\| \ell \left(\sum_{i=1}^n u_i e_i \right) - \ell \left(\sum_{i=1}^n v_i e_i \right) \right\| \\ &= \left\| \sum_{i=1}^n u_i \ell(e_i) - \sum_{i=1}^n v_i \ell(e_i) \right\| \\ &= \left\| \sum_{i=1}^n (u_i - v_i) \ell(e_i) \right\| \\ &\leq \sum_{i=1}^n |u_i - v_i| \|\ell(e_i)\| \\ &\leq \max_{1 \leq i \leq n} \|\ell(e_i)\| \sum_{i=1}^n |u_i - v_i| \\ &= \max_{1 \leq i \leq n} \|\ell(e_i)\| \|u - v\|_1 \\ &= M \|u - v\| \end{aligned}$$

donde $M = C \max_{1 \leq i \leq n} \|\ell(e_i)\|$, donde $C > 0$ viene de la equivalencia de la norma $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|$ en $\mathbb{R}^n$.

b) **(0.5 ptos)** ¿Es ℓ continua? Justifique.

La continuidad es directa pues ℓ es M -Lipschitz.

c) **(0.5 ptos)** Muestre que $\ker(\ell) = \{x \in \mathbb{R}^n : \ell(x) = 0\}$ es cerrado.

Basta notar que como $(\mathbb{R}^m, \|\cdot\|)$ es un evn los síngleton son cerrados y como ℓ es continua, sabemos que las preimágenes de cerrados en $\mathbb{R}^m$ mediante ℓ son cerrados en $\mathbb{R}^n$. Concluimos entonces que $\ker(\ell) = \ell^{-1}(\{0\})$ es un cerrado en $\mathbb{R}^n$. También se puede demostrar mediante sucesiones.

d) **(1 pto)** Demuestre que ℓ es inyectiva si y solo si existe $m > 0$ tal que $\|\ell(x)\| \geq m\|x\|$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Primero supongamos que existe $m > 0$, y que $\ell(x) = 0$. Entonces $0 = \|\ell(x)\| \geq m\|x\| = 0$, y por lo tanto $x = 0$, es decir, ℓ es inyectiva. Ahora supongamos que ℓ es inyectiva y probemos la existencia de tal constante. Para ello, consideremos la función $g : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = \left\| \ell \left(\frac{x}{\|x\|} \right) \right\| = \|\cdot\| \circ \ell \left(\frac{x}{\|x\|} \right).$$

Primero notemos que $\|\cdot\| \circ \ell$ es una función continua, pues es

composición de continuas. El conjunto $A = \left\{ \frac{x}{\|x\|} : x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \right\} = \partial B(0, 1)$ y además $\|\cdot\| \circ \ell(z) > 0$

para todo $z \in A$, pues ℓ es inyectivo (solo vale 0 en $z = 0$, pero $0 \notin A$). De esta forma, concluimos entonces que $\|\cdot\| \circ \ell$ alcanza su mínimo en A y existe $m > 0$ tal que $\|\cdot\| \circ \ell(z) \geq m$ para todo $z \in A$.

Pero esto implica que $\|\cdot\| \circ \ell \left(\frac{x}{\|x\|} \right) \geq m$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y por lo tanto $\|\ell(x)\| \geq m\|x\|$.

ii) Estudie el límite en el origen de las siguientes funciones:

a) (0.5 pts)

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1 + x - \cos(x^2 + y^2) - \arctan(x)}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Esta función es continua en $(0, 0)$. En efecto:

$$\begin{aligned} \left| \frac{1 + x - \cos(x^2 + y^2) - \arctan(x)}{x^2 + y^2} \right| &\leq \left| \frac{1 - \cos(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} \right| + \left| \frac{x - \arctan(x)}{x^2 + y^2} \right| \\ &\leq \left| \frac{1 - \cos(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} \right| + \left| \frac{x - \arctan(x)}{x^2} \right| \end{aligned}$$

Si $(x, y) \rightarrow (0, 0)$, entonces $x^2 + y^2 \rightarrow 0$ y como $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{1 - \cos u}{u^2} = 0$ concluimos que $\left| \frac{1 - \cos(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} \right| \rightarrow$

0. Por otro lado, como $x \rightarrow 0$ es fácil comprobar (con L'Hopital por ejemplo) que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctan(x)}{x^2} = 0$, y por lo tanto

$$|f(x, y) - f(0, 0)| = \left| \frac{1 + x - \cos(x^2 + y^2) - \arctan(x)}{x^2 + y^2} \right| \rightarrow 0$$

cuando $(x, y) \rightarrow (0, 0)$.

b) (0.5 pts)

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \leq 0 \text{ ó } y \geq x^2 \\ 1 & \text{si } y > 0 \text{ e } y < x^2 \end{cases}$$

Esta función no es continua en el origen. Consideremos la sucesión de puntos en $\mathbb{R}^2$ dada por $(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n^2}, \frac{1}{2n^2}\right)$. Por un lado tenemos que $(x_n, y_n) \rightarrow 0$ pero $f(x_n, y_n) = 1 \neq f(0, 0)$.

c) (0.5 pts)

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^3}{x^4 + y^6} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Esta función no es continua en el origen. Si consideramos la sucesión $(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n^3}, \frac{1}{n^2}\right)$ tenemos

$$\text{que } (x_n, y_n) \rightarrow (0, 0), \text{ sin embargo } f(x_n, y_n) = \frac{\frac{1}{n^6} \cdot \frac{1}{n^6}}{\frac{1}{n^{12}} + \frac{1}{n^{12}}} = \frac{1}{2} \neq f(0, 0).$$

Indicación: Puede ser útil conocer los siguientes límites: $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{1 - \cos u}{u^2}$ y $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{u - \arctan u}{u^3}$.

iii) (1.5 pts) Determine para que valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ es continua en $(0, 0)$ la siguiente función:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x|y|^\alpha}{x^4 + y^4 + x^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Hagamos el cambio a coordenadas polares $x = \rho \cos \theta$ e $y = \rho \sin \theta$. De esta forma la expresión queda como:

$$\frac{\rho^{\alpha-1} \cos \theta (\sin \theta)^\alpha}{\rho^2 (\cos^4 \theta + \sin^4 \theta) + \cos^2 \theta}$$

Si $\alpha > 1$ entonces la expresión de arriba se va a 0 y entonces f es continua en el origen. Si $\alpha \leq 1$ basta tomar dos valores de θ distintos para obtener diferentes límites, y por lo tanto en este caso f no es continua en el origen.

P3. i) Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua y definamos $g : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$g(x) = f\left(\frac{x}{\|x\|}\right)$$

a) **(0.5 pts)** Pruebe que g alcanza su máximo y su mínimo en $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Notemos que $A = \left\{ \frac{x}{\|x\|} : x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \right\} = \partial B(0, 1)$ es un conjunto compacto. Como f es continua, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ alcanza su máximo y mínimo en A , y por lo tanto g alcanza su máximo y mínimo en $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

b) **(1.5 pts)** Pruebe que $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ existe si y solo si f es constante en $\partial B(0, 1) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$.

Si $f(z) = c$, para todo $z \in \partial B(0, 1)$, entonces $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f\left(\frac{x}{\|x\|}\right) = c$, y por lo tanto existe. Recíprocamente, basta ocupar la continuidad de f por definición y ver que se satisface para todo $\epsilon > 0$. Tomando límite $\epsilon \rightarrow 0$ se tiene que f debe ser constante en $\partial B(0, 1)$.

ii) Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

a) **(1 pts)** Estudie la continuidad de f en todo su dominio.

Claramente es continua en $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ (por álgebra de funciones continuas). Veremos que en el origen también lo es, en efecto:

$$\left| \frac{xy^3}{x^2 + y^2} \right| \leq \left| \frac{xy^3}{y^2} \right| = |xy| \rightarrow 0 = f(0, 0)$$

cuando $(x, y) \rightarrow (0, 0)$.

b) **(1 pts)** Determine las derivadas parciales de f donde existan.

Dado que f es diferenciable en $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ (por álgebra de funciones diferenciables) en particular es derivable parcialmente y valen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \frac{y^3(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \frac{y^2(3x^3 + y^2x)}{(x^2 + y^2)^2} \end{aligned}$$

Estudiemos la existencia de derivadas parciales en el origen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f((0, 0) + t(1, 0)) - f(0, 0)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t, 0)}{t} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f((0,0) + t(0,1)) - f(0,0)}{t} \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0,t)}{t} \\
&= 0
\end{aligned}$$

c) (1 pto) Analice la continuidad de las derivadas parciales en $(0,0)$.

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \right| &= \left| \frac{y^3(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2} \right| \\
&\leq \frac{(|y|^3 + |x|^3)(y^2 + x^2)}{(x^2 + y^2)^2} \\
&= \frac{\|(x,y)\|_3^3 \|(x,y)\|_2^2}{\|(x,y)\|_2^4} \\
&\leq C^3 \frac{\|(x,y)\|_2^5}{\|(x,y)\|_2^4} \\
&= C^3 \|(x,y)\|_2 \rightarrow 0
\end{aligned}$$

cuando $(x,y) \rightarrow (0,0)$, y por lo tanto $\frac{\partial f}{\partial x}$ es continua en el origen.

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \right| &= \left| \frac{y^2(3x^3 + y^2x)}{(x^2 + y^2)^2} \right| \\
&\leq \frac{(y^2 + x^2)(3(|x|^3 + |y|^3) + (y^2 + x^2)(|x| + |y|))}{(x^2 + y^2)^2} \\
&= \frac{\|(x,y)\|_2^2 (3\|(x,y)\|_3^3 + \|(x,y)\|_2^2 \|(x,y)\|_1)}{\|(x,y)\|_2^4} \\
&\leq \frac{\|(x,y)\|_2^2 (3C^3 \|(x,y)\|_2^3 + M \|(x,y)\|_2^3)}{\|(x,y)\|_2^4} \\
&= (3C^3 + M) \|(x,y)\|_2 \rightarrow 0
\end{aligned}$$

cuando $(x,y) \rightarrow (0,0)$, y por lo tanto $\frac{\partial f}{\partial y}$ es continua en el origen.

d) (1 pto) Analice la diferenciabilidad de f en $(0,0)$.

Dado que las derivadas parciales existen y son continuas en el origen, concluimos que f es diferenciable en el origen.

TIEMPO: 3 HORAS