MA2001-1 Cálculo en Varias Variables. Semestre 2010-2
Profesor: Marcelo Leseigneur **Auxiliares:** Víctor Verdugo y Sebastián Bustamante

Control 1

Miércoles 29 de Septiembre 2010

P1. *i)* Comente las siguientes afirmaciones. En caso que alguna sea verdadera, demuéstrela y si fuera falsa de un contraejemplo.

a) **(0.5 ptos)** Sea $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ contínua y $Gr(f)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m : f(x)=y\}$. Entonces $Gr(f)$ es cerrado.

b) **(0.5 ptos)** Sea $(\mathbb{R}^n,\|\cdot\|)$ un evn y $A,B\subset\mathbb{R}^n$. Si $A\subset B$, entonces $\partial A\subset\partial B$.
Indicación: Recuerde que $\partial A=\overline{A}\cap\overline{A^c}$.

c) **(0.5 ptos)** Sea $I:(\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}),\|\cdot\|_1)\to(\mathbb{R},|\cdot|)$ definida por $I(f)=\displaystyle\int_a^b f(x)dx$. Entonces I es un operador lineal contínuo.

d) **(0.5 ptos)** Pruebe que toda norma $\|\cdot\|$ en $\mathbb{R}$ es de la forma $\|x\|=\alpha|x|$, donde $\alpha>0$ y $|\cdot|$ es la función valor absoluto. Concluya que toda norma en $\mathbb{R}$ proviene de un producto interno. Determínelo.

e) **(0.5 ptos)** Si $A=\{(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n : x_i\in\mathbb{Q},\ \forall\ 1\le i\le n\}$ explicite $\overline{A}$, int A y ∂A.

f) **(0.5 ptos)** Si $A\subset\mathbb{R}^n$ es un cerrado o un abierto, entonces int $(\partial A)=\emptyset$. ¿Es cierto este resultado para cualquier conjunto A? Pruébelo o de un contraejemplo.

ii) Sea $E=\mathbb{R}[X]$ el espacio de los polinomios coeficientes reales. Considere las siguientes aplicaciones, donde $p(x)=\displaystyle\sum_{i=0}^{q}a_ix^i$:

$$\begin{aligned} N_\infty : E &\to \mathbb{R}_+ \\ p &\mapsto N_\infty(p)=\sup_{0\le i\le q}|a_i| \\ \Phi : E &\to \mathbb{R} \\ p &\mapsto \Phi(p)=p(1)\end{aligned}$$

a) **(1 pto)** Pruebe que (E,N_∞) es un espacio vectorial normado.

b) **(0.5 ptos)** Pruebe que Φ es lineal.

c) **(0.5 ptos)** Considere la familia de polinomios $p_n(x)=x+x^2+\ldots+x^n$, para todo $n\in\mathbb{N}$. Calcule $\Phi(p_n)$ y $N_\infty(p_n)$.

d) **(1 pto)** Deduzca que $\Phi:(E,N_\infty)\to(\mathbb{R},|\cdot|)$ no es continua.

P2. *i)* Sea $\ell:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ una función lineal, donde los conjuntos de partida y llegada están dotados de alguna norma.

a) **(1 pto)** Demuestre que existe $M>0$ tal que $\|\ell(u)-\ell(v)\|\le M\|u-v\|$, para todo $u,v\in\mathbb{R}^n$.

b) **(0.5 ptos)** ¿Es ℓ contínua? Justifique.

c) **(0.5 ptos)** Muestre que $\ker(\ell)=\{x\in\mathbb{R}^n : \ell(x)=0\}$ es cerrado.

d) **(1 pto)** Demuestre que ℓ es inyectiva si y solo si existe $m>0$ tal que $\|\ell(x)\|\ge m\|x\|$, para todo $x\in\mathbb{R}^n$.

ii) Estudie el límite en el origen de las siguientes funciones:

a) **(0.5 ptos)**

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1+x-\cos(x^2+y^2)-\arctan(x)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\[2ex] 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Esta función es contínua en $(0,0)$. En efecto:

$$\begin{aligned} \left|\frac{1+x-\cos(x^2+y^2)-\arctan(x)}{x^2+y^2}\right| &\leq \left|\frac{1-\cos(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\right| + \left|\frac{x-\arctan(x)}{x^2+y^2}\right| \\ &\leq \left|\frac{1-\cos(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\right| + \left|\frac{x-\arctan(x)}{x^2}\right| \end{aligned}$$

Si $(x,y)\to(0,0)$, entonces $x^2+y^2\to 0$ y como $\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{1-\cos u}{u^2}=0$ concluimos que $\left|\dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\right|\to 0$. Por otro lado, como $x\to 0$ es fácil comprobar (con L'Hopital por ejemplo) que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\arctan(x)}{x^2}=0$, y por lo tanto

$$|f(x,y)-f(0,0)| = \left|\frac{1+x-\cos(x^2+y^2)-\arctan(x)}{x^2+y^2}\right| \to 0$$

cuando $(x,y)\to(0,0)$.

b) **(0.5 ptos)**

$$f(x,y)=\begin{cases} 0 & \text{si } y\leq 0 \text{ ó } y\geq x^2 \\ 1 & \text{si } y>0 \text{ ó } y<x^2 \end{cases}$$

c) **(0.5 ptos)**

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2y^3}{x^4+y^6} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

Indicación: Puede ser útil conocer los siguientes límites: $\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{1-\cos u}{u^2}$ y $\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{u-\arctan u}{u^3}$.

iii) **(1.5 ptos)** Determine para que valores de $\alpha\in\mathbb{R}$ es contínua en $(0,0)$ la siguiente función:

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x|y|^\alpha}{x^4+y^4+x^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

P3. *i*) Sea $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ una función continua y definamos $g:\mathbb{R}^n\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$ como

$$g(x)=f\left(\frac{x}{\|x\|}\right)$$

a) **(0.5 ptos)** Pruebe que g alcanza su máximo y su mínimo en $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$.

b) **(1.5 ptos)** Pruebe que $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ existe si y solo si f es constante en $\partial B(0,1)=\{x\in\mathbb{R}^n : \|x\|=1\}$.

ii) Sea $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ la función definida por:

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

a) **(1 pto)** Estudie la continuidad de f en todo su dominio.

b) **(1 pto)** Determine las derivadas parciales de f donde existan.

c) **(1 pto)** Analice la continuidad de las derivadas parciales en $(0,0)$.

d) **(1 pto)** Analice la diferenciabilidad de f en $(0,0)$.

TIEMPO: 3 HORAS