Cálculo en Varias Variables
Auxiliar 8 - Primavera 2010

Prof: Marcelo Leseigneur
Aux: Sebastián Bustamante F. & Víctor Verdugo S.

P1. Sea $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\operatorname{sen}(xy)}{x} & \text{si } x\neq 0,\\ y & \text{si } x=0.\end{cases}$$

i) Estudie la continuidad de f en $\mathbb{R}^2$.

ii) Encuentre las derivadas parciales de f y estudie su continuidad en $\mathbb{R}^2$.

iii) Estudie la diferenciabilidad en f de $\mathbb{R}^2$.

iv) Encuentre la matriz jacobiana de f en $(\pi,1)$ y calcule la ecuación del plano tangente al gráfico de f en $(\pi,1,0)$.

P2. Considere el espacio vectorial $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m$ provisto de la norma $\|(x,y)\|=\sqrt{\|x\|^2+\|y\|^2}$. Sea $B:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$ una función tal que existe una función lineal $L:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ que cumple

$$B(x,y)=\langle L(x),y\rangle\,,\quad \forall (x,y)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m.$$

i) Demuestre que existe una constante $C>0$ tal que

$$|B(x,y)|\leq C\|x\|\|y\|,\quad \forall (x,y)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m.$$

ii) Demuestre que para todo $(x,y),(h,k)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m$ se tiene

$$B((x,y)+(h,k))=B(x,y)+B(x,k)+B(h,y)+B(h,k).$$

iii) Demuestre que B es continua en cada punto $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m$.

iv) Demuestre que B es diferenciable en cada punto $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m$, con

$$DB(x_0,y_0)(h,k)=B(h,y_0)+B(x_0,k),\quad \forall (h,k)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m.$$

P3. Pruebe que la función $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ definida por

$$f(x,y)=(s,t)=\left(x+\frac{1}{2}\arctan y, y+\frac{1}{2}\arctan x\right)$$

admite una inversa local f^{-1} de clase C^1 alrededor de todo punto $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$. Calcule la aproximación afín de f^{-1} en una vecindad de $(s_0,t_0)=f(0,1)$.

P4. Sea $n\in\mathbb{N}^*$ y sea $y_0\in\mathbb{R}$ una raíz simple del polinomio con coeficientes reales

$$P(y)=a_0+a_1y+\cdots+a_ny^n,$$

es decir, $P(y_0)=0$ y $P'(y_0)\neq 0$. Sea $x=(x_0,x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^{n+1}$. Pruebe que en una vecindad de $(0,y_0)$ la ecuación

$$F(x,y)=(a_0+x_0)+(a_1+x_1)y+\cdots+(a_n+x_n)y^n=0$$

admite una única solución $y=g(x)$ de clase C^1 tal que

$$\nabla g(0)=-\frac{1}{P'(y_0)}(1,y_0,y_0^2,\ldots,y_0^n).$$