

MA2001-1 Cálculo en Varias Variables. Semestre 2010-2

Profesor: Marcelo Leseigneur Auxiliares: Sebastián Bustamante y Víctor Verdugo

Auxiliar 7

Martes 28 de Septiembre de 2010

P1. Sea $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio de Hilbert, y $K \subset H$ un convexo cerrado no vacío.a) Pruebe que para todo $x \in H$, existe un único $\bar{x} \in K$ tal que

$$\|x - \bar{x}\| = \min_{y \in K} \|x - y\|$$

b) Pruebe que $\bar{x}$ se caracteriza por:

- $\bar{x} \in K$
- $\langle x - \bar{x}, y - \bar{x} \rangle \leq 0$

c) Sea $P_K : H \rightarrow K$ tal que $P_K(x) = \min_{y \in K} \|x - y\| = \bar{x}$. Pruebe que

$$\|P_K(x_1) - P_K(x_2)\| \leq \|x_1 - x_2\|$$

Concluya que es continuo. Además si K es un subespacio de H , entonces P_K es lineal.**P2. (Teorema de Riesz)** Sea $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio de Hilbert, y $\psi \in \mathcal{L}(H, \mathbb{R})$. Pruebe que existe un único $w \in H$ tal que

$$\psi(x) = \langle w, x \rangle$$

para todo $x \in H$. Además pruebe que $\|w\| = \|\psi\|_{\mathcal{L}(H, \mathbb{R})}$.**P3.** Estudie la diferenciabilidad, continuidad y existencia de derivadas parciales en el origen de f definida como:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{y(x^2 + xy)}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

P4. Considere el espacio vectorial de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ sobre el cuerpo $\mathbb{R}$, provisto de la norma $\|(x, y)\| = \sqrt{\|x\|^2 + \|y\|^2}$. Sea $B : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ una función bilineal, es decir, las aplicaciones $B(\cdot, y) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ y $B(x, \cdot) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ son lineales (con x e y fijos respectivamente)

- a) Demuestre que existe una constante $C > 0$ tal que $|B(x, y)| \leq C\|x\|\|y\|$, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$.
- b) Demuestre que $\forall (x, y), (w, z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, se tiene que $B((x, y) + (w, z)) = B(x, y) + B(x, z) + B(w, y) + B(w, z)$.
- c) Demuestre que B es diferenciable en cada punto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ y se tiene que $DB(x_0, y_0)(w, z) = B(w, y_0) + B(x_0, z)$.
- d) Demuestre que B es continua y derivable parcialmente en todo punto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$.