MA2001-1 Cálculo en Varias Variables. Semestre 2010-2

Profesor: Marcelo Leseigneur Auxiliares: Sebastián Bustamante y Víctor Verdugo

Auxiliar 6

Lunes 27 de Septiembre de 2010

- P1. (Lema de Urysohn)** Sea $(X, \|\cdot\|)$ un evn, y $A, B \subset X$ dos cerrados disjuntos. Pruebe que existe una función continua $f : X \rightarrow [0, 1]$ tal que $f|_A \equiv 0$ y $f|_B \equiv 1$.
- P2.** Sean X, Y dos evn y $f, g : X \rightarrow Y$ dos funciones continuas tales que $f(x) = g(x)$, para todo $x \in D$, donde D es denso en X . Pruebe que $f(x) = g(x)$ para todo $x \in X$.
- P3.** Considere la aplicación $\phi : (\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\phi(f) = f(0)$. Pruebe que es continua. ¿Siguiendo siendo continua si ahora el espacio de partida se dota de la topología inducida por la norma $\|\cdot\|_1$?
- P4.** Consideremos el siguiente espacio de funciones:

$$X = \{f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}) : f(0) = f(1) = 0\}$$

- a) Pruebe que X es un subespacio vectorial cerrado de $(\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$.
- b) Concluya que X es un espacio de Banach.
- P5.** Sea $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio de Hilbert, y $K \subset H$ un convexo cerrado no vacío.

- a) Pruebe que para todo $x \in H$, existe un único $\bar{x} \in K$ tal que

$$\|x - \bar{x}\| = \min_{y \in K} \|x - y\|$$

- b) Pruebe que $\bar{x}$ se caracteriza por:

- $\bar{x} \in K$
- $\langle x - \bar{x}, y - \bar{x} \rangle \leq 0$

- c) Sea $P_K : H \rightarrow K$ tal que $P_K(x) = \min_{y \in K} \|x - y\| = \bar{x}$. Pruebe que

$$\|P_K(x_1) - P_K(x_2)\| \leq \|x_1 - x_2\|$$

Concluya que es continuo. Además si K es un subespacio de H , entonces P_K es lineal.

- P6. (Teorema de Riesz)** Sea $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio de Hilbert, y $\psi \in \mathcal{L}(H, \mathbb{R})$. Pruebe que existe un único $w \in H$ tal que

$$\psi(x) = \langle w, x \rangle$$

para todo $x \in H$. Además pruebe que $\|w\| = \|\psi\|_{\mathcal{L}(H, \mathbb{R})}$.

- P7. (Bonus)** Sea $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio de Hilbert, y E un subespacio vectorial cerrado de H , con $E \neq H$. Demuestre que existe $e \in H$ tal que $\|e\| = 1$ y $d(e, E) = 1$, donde $d(e, E) = \inf_{y \in E} \|e - y\|$.