Cálculo en Varias Variables
Problemas de Continuidad, Espacios Métricos y Espacios Normados

Prof: Marcelo Leseigneur
Aux: Sebastián Bustamante F. - Víctor Verdugo S.

P1. Sea X el conjunto de las n-tuplas ordenadas de ceros y unos. Mostrar que X tiene 2^n elementos y que $d(x,y) =$"número de lugares en que x e y tienen valores diferentes" es una métrica sobre X. (Esta es la llamada distancia de Hamming y es útil en teoría de autómatas y códigos.)

P2. Determinar si la aplicación $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $d(x,y) = |x^2 - y^2|$ es una métrica sobre $\mathbb{R}$. Si no lo es, decir si existe un subconjunto de la recta en que sí lo sea. Dar el mayor de los conjuntos que lo cumplen.

P3. Sea f una aplicación continua y periódica tal que el conjunto $\{T : T$ es período de $f\}$ es denso en $\mathbb{R}$. Demostrar que f es constante.

P4. Sea $f : X \to Y$ una aplicación tal que $f|_A : A \to f(A)$ es continua, con $A \subset X$. ¿Es necesariamente f continua en A?

P5. Sea X un conjunto no vacío. Una aplicación $d : X \times X \to \mathbb{R}$ se llama pseudométrica si se verifica lo siguiente:

i) $d(x,y) \geq 0,\ \forall x,y \in X.$
ii) $d(x,x) = 0,\ \forall x \in X.$
iii) $d(x,y) = d(y,x),\ \forall x,y \in X.$
iv) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(y,z),\ \forall x,y,z \in X.$

¿La función $d(x,y) = \int_a^b |x(t) - y(t)|dt$ define una métrica o pseudométrica en $C[a,b]$?¿Y en $R[a,b]$ las funciones Riemann-integrables en $[a,b]$?

P6. Se considera el conjunto

$$C_0(\mathbb{R}^n) = \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : f \text{ continua y } \lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0\}$$

subespacio del espacio de Banach $(C(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_\infty)$. Pruebe que $C_0(\mathbb{R}^n)$ es de Banach.

P7. Sean $(X_1, \|\cdot\|_1), (X_2, \|\cdot\|_2)$ espacios normados. Si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X_1$ es una sucesion que converge a x en $(X_1, ||\cdot||_1)$ y $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}(X_1, X_2)$ una sucesión que converge a T en $(L(X_1,X_2), \|\cdot\|)$, probar que $T_n(x_n) \to T(x)$ en $(X_2, \|\cdot\|_2)$.

P8. Si $X = C[0,1]$ con la norma $\|\cdot\|_1$, se definen los operadores $S, T : X \to X$ como $S(x)(s) = \int_0^1 x(t)dt$, $T(x)(s) = sx(s)$ respectivamente.

i) ¿Conmutan S y T?

ii) Pruebe que $S, T \in \mathcal{L}(X, X)$.

iii) Encuentre $\|S\|, \|T\|, \|TS\|, \|ST\|$.

P9. Sea $X = C[0,1]$ con la norma uniforme.

i) Si $T \in \mathcal{L}(X, X)$ se define como $T(f)(t) = \frac{tf(t)}{1+t^2},\ t \in [0,1],\ f \in X$, encuentre $\|T\|$.

ii) Si S se define como $S(f)(t) = \int_0^1 K(t,s)f(s)ds$, donde K es continua, pruebe que S es lineal y continua.

iii) Fijado $t_0 \in [0,1]$, se define x^* por $x^*(f) = f(t_0)$. Pruebe que x^* es lineal, continua y encuentre $\|x^*\|$.

P10. Considere $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ continua. Pruebe las siguientes propiedades:

i) Si $A \subset \mathbb{R}^m$ es abierto (cerrado), entonces $f^{-1}(A)$ es abierto (cerrado) en $\mathbb{R}^n$.

ii) $f(adh(A)) \subseteq adh(f(A))$, para cualquier $A \subseteq \mathbb{R}^n$.

iii) $f^{-1}(int(B)) \subseteq int(f^{-1}(B))$ y $adh(f^{-1}(B)) \subseteq f^{-1}(adh(B))$, para cualquier $B \in \mathbb{R}^m$.

P11. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ continua y sea $Gr(f) := \{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m : f(x) = y\}$. Probar que $Gr(f)$ es cerrado.

P12. Estudie la continuidad de la función $f(x,y) = \sin(xy)\dfrac{y^2 - x^2}{x^2 + y^2}$.

P13. Considere la función $f : R^2 \backslash \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$. Pruebe que

$$\lim_{x \to 0} \lim_{y \to 0} f(x,y) = \lim_{y \to 0} \lim_{x \to 0} f(x,y) = 0,$$

pero que

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x,y)$$

no existe.

P14. Considere la función $f : R^2 \backslash \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$. Pruebe que

$$\lim_{x \to 0} \lim_{y \to 0} f(x,y) = \lim_{y \to 0} \lim_{x \to 0} f(x,y) = 1,$$

pero que

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x,y)$$

no existe.

P15. Considere $l : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ función lineal y continua. Probar que el kernel de l, es decir, $ker(l) = \{x \in \mathbb{R}^n : l(x) = 0\}$ es cerrado.