

Cálculo en Varias Variables

Auxiliar 5 - Primavera 2010

Profesor: Marcelo Leseigneur
Auxiliares: Sebastián Bustamante F. & Víctor Verdugo S.

- P1.** Sea $(E, \|\cdot\|)$ un e.v.n. y F un s.e.v.n. de E . Demuestre que $B[0, 1] \subseteq F \Rightarrow F = E$.
- P2.** Sean $(E, \|\cdot\|_E), (F, \|\cdot\|_F)$ espacios vectoriales normados y $L : E \rightarrow F$ una función lineal. Pruebe que:
- (i) L es continua $\Leftrightarrow L$ es continua en 0.
 - (ii) L es continua en 0 $\Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R}$ tal que $\forall x \in E, \|L(x)\|_F \leq c \cdot \|x\|_E$.
- P3.** Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto no vacío. Sea $h : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ un “homeomorfismo”, es decir, h es biyectiva y tanto h como h^{-1} son continuas. Además, h es uniformemente continua, esto es, h verifica que

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x, y)\|x - y\| < \delta \Rightarrow \|h(x) - h(y)\| < \epsilon.$$

Demuestre que bajo estas hipótesis, U debe ser igual a todo $\mathbb{R}^n$. Para esto:

- a) Pruebe que si $U \subseteq \mathbb{R}^n$ es abierto y cerrado a la vez, entonces $U = \mathbb{R}^n$ ó $U = \emptyset$.
 - b) Pruebe que si $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy y h es uniformemente continua, entonces $\{h(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ es también una sucesión de Cauchy.
 - c) Recordando que en $\mathbb{R}^n$ una sucesión es convergente si y sólo si es de Cauchy, deduzca que U es cerrado y concluya.
- P4.** Determine la continuidad en el origen de

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- P5.** Determine los valores de α para que la siguiente función sea continua en el origen:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2|y|^\alpha}{x^6 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- P6.** Considere los conjuntos $A, B \subset \mathbb{R}^2$ dados por $A = \{(x, y) : x \neq 0 \wedge y \neq 0\}$ y $B = \{(0, 0)\} \cup \{(1/n\pi, 0) : n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\} \cup \{(0, 1/n\pi) : n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$. Demuestre que la función $f : A \cup B \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} (x + y) \operatorname{sen}(1/x) \operatorname{sen}(1/y) & \text{si } (x, y) \in A \\ 0 & \text{si } (x, y) \in B \end{cases}$$

es continua en $A \cup B$.