**MA2001-1 Cálculo en Varias Variables**. Semestre 2010-2
**Profesor:** Marcelo Leseigneur **Auxiliares:** Sebastián Bustamante y Víctor Verdugo

# Tarea 2

## Fecha de entrega: Viernes 24 de Septiembre.

**P1.** Determinar para que valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ existe el límite en $(0,0)$ de la función

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2|y|^\alpha}{x^6+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

**P2.** Determine el límite en $(0,0)$ de las siguientes funciones:

*a*)

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

*b*)

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^3}{x^4+y^6} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

*c*)

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

*d*)

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y}{x}\operatorname{sen}(x^2+y^2) & \text{si } x\neq 0\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}$$

**P3.** Determinar para que valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ es la contínua en $(0,0)$ la función

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x|y|^\alpha}{x^4+y^4+x^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

**P4.** Determine si es contínua en $(0,0)$ la siguiente función

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x\cos y-y\cos x-x+y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

**P5.** Determine si es contínua en $(0,0)$ la siguiente función

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^4+\operatorname{sen} y^4}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

**P6.** Calcule el siguiente límite (en caso que exista):

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1 + x - \cos(x^2+y^2) - \arctan x}{x^2+y^2}$$

**P7.** Determine si son contínuas en $(0,0)$ las siguientes funciones de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$:

*a)*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}\operatorname{sen}(xy) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

*b)*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^2(x^3+y^2)+x^4}{x^4+y^4} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

*c)*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2+y^4} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

*d)*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(xy)^2}{(xy)^2+(x-y)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

*e)*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y}{\tan x - \tan y} & \text{si } \tan x \neq \tan y \\ \cos^3 x & \text{si } \tan x = \tan y \end{cases}$$

**P8.** Calcule el límite en $(0,0)$ (en caso que exista) de las siguientes funciones:

*a)* $f(x,y) = \dfrac{x\operatorname{sen} y + y}{|x|+|y|}$

*b)* $f(x,y) = \dfrac{x^2 y}{x^6+y^2}$

*c)* $f(x,y) = \dfrac{x^2 y + x\operatorname{sen} y}{\sqrt{x^2+y^2-xy}}$

*d)* $f(x,y) = \dfrac{x^2y^3}{x^4+y^2}$

*e)* $f(x,y) = \dfrac{\operatorname{sen} x^3 - \tan y^3}{x^2+y^2}$

**P9.** Sea $f(x,y) = \dfrac{x^2y}{x^4+4y^2}$.

*a)* Sea $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definida como $\alpha(t) = (t,0)$. Pruebe que $\lim_{t\to 0} f(\alpha(t)) = 0$.

*b)* Sea $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definida como $\beta(t) = (0,t)$. Pruebe que $\lim_{t\to 0} f(\beta(t)) = 0$.

*c)* Pruebe que para cualquier $m \in \mathbb{R}$, si se define $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ como $\gamma(t) = (t, mt)$, entonces $\lim_{t\to 0} f(\gamma(t)) = 0$.

*d)* Sea $\delta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definida como $\delta(t) = (t,t^2)$. Pruebe que $\lim_{t\to 0} f(\alpha(t)) = \dfrac{1}{5}$.

*e)* ¿Qué puede concluir acerca de $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+4y^2}$?

*e)* Grafique $f$ y compare sus resultados con el gráfico.

**P10.** Analice la continuidad de la función

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1-e^{-\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ \\ 1 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

**P11.** Analice la continuidad de la función

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{x^4+y^4} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ \\ 1 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

**P12.** Encuentre y grafique el dominio de las siguientes funciones:

*a)* $f_1(x,y)=\dfrac{\ln y}{2x^2-1}$

*b)* $f_2(x,y,z)=\dfrac{\sqrt{x+y}}{xz^2}$

*c)* $f_3(x,y,z)=\sqrt{36-4x^2-9y^2-z^2}$

**P13.** Encuentre el dominio e imagen de las siguientes funciones. Luego, grafíquelas.

*a)* $g_1(x,y)=x^2+4y^2+1$

*b)* $g_2(x,y)=\operatorname{sen} x\cos y$

*c)* $g_3(x,y)=e^{-x/2}\operatorname{sen} y$

**P14.** *a)* Sea $f:D\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ tal que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=l$. Supongamos que para cada $x$ existe $\displaystyle\lim_{y\to b} f(x,y)$ y para cada $y$ existe $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x,y)$. Pruebe que:

$$\lim_{x\to a}\lim_{y\to b} f(x,y)=\lim_{y\to b}\lim_{x\to a} f(x,y)=l$$

*b)* Aplique la proposición anterior para probar que la función $f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ no tiene límite en $(0,0)$.

*c)* Verifique que la función $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ tiene límites iterados que coinciden, sin embargo, no existe el límite en $(0,0)$.

**P15.** Sea $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ un abierto, $a\in\Omega$ y $f:\Omega\to\mathbb{R}$. Para $\delta>0$ tal que $B(a,\delta)\subset\Omega$ se definen:

$$\begin{aligned}M(a,f,\delta) &= \sup\{f(x):x\in B(a,\delta)\}\\ m(a,f,\delta) &= \inf\{f(x):x\in B(a,\delta)\}\end{aligned}$$

Se define la *osiclación de $f$ en $a$*, denotada por $osc(f,a)$, como

$$osc(f,a)=\lim_{\delta\to 0^+}\left(M(a,f,\delta)-m(a,f,\delta)\right)$$

Pruebe que si $f$ es acotada, entonces es contínua en $a$ si y solo si $osc(f,a)=0$.

**P16.** Calcule el valor del siguiente límite (en caso que exista) :

$$\lim_{(x,y)\to(a,a)}\frac{(x-y)a^n+(a-x)y^n-(a-y)x^n}{(x-y)(a-x)(a-y)}$$

**P17.** Sea $f$ una función contínua definida en un evn $(E,\|\cdot\|_E)$ con valores en $(F,\|\cdot\|_F)$. Pruebe que:

*a)* Si $B\subset F$ es cerrado, entonces $f^{-1}(B)\subset E$ también es cerrado.

*b)* Si $B\subset F$ es abierto, entonces $f^{-1}(B)\subset E$ también es abierto.

*c*) $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$, para todo $A \subset E$.

*d*) $f^{-1}(\text{int}A) \subset \text{int}f^{-1}(B)$, para todo $B \subset F$.

*e*) $\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\overline{B})$, para todo $B \subset F$.

**P18.** Sea $f$ una función continua definida en un evn $(E, \|\cdot\|_E)$ con valores en un evn $(F, \|\cdot\|_F)$. Demuestre que el conjunto $G(f) = \{(x, y) \in E \times F : y = f(x)\}$ es cerrado en el evn producto $E \times F$.

**P19.** Sea $L : E \to \mathbb{R}$ una función lineal continua. Pruebe que $L$ es continua si y solo si $Ker(L)$ es cerrado en $E$.

**P20.** Sea $I : (\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}), \|\cdot\|_1) \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$ definida por $I(f) = \int_a^b f(x)dx$. Demuestre que $I$ es un operador lineal continuo.

**P21.** Sea $D$ un subconjunto denso en un evn $X$. Sea $Y$ otro evn, y $f : X \to Y$ una función contínua. Pruebe que $f(D)$ es denso en $Y$.

**P22.** Sea $f, g : X \to Y$ dos funciones continuas tales que $f(x) = g(x)$, para todo $x \in D$, donde $D$ es denso en $X$. Pruebe que $f(x) = g(x)$ para todo $x \in X$.

**P23.** Sea $(E, \|\cdot\|)$ un evn, $a \in E$ y $f : E \to \mathbb{R}$ una función continua. Pruebe que existe $\delta > 0$ tal que $f(x) > \frac{f(a)}{2}$ para todo $x \in B(a, \delta/2)$.

**P24.** Sean $E_1, \ldots, E_n$ espacios vectoriales normados, y sea $\pi_i : \prod_{j=1}^{n} E_j \to E_i$ tal que $\pi_i(x) = x_i$. Pruebe que $\pi_i$ es contínua.

**P25.** Sea $f$ una función continua definida en un evn $E$ con valores en $\mathbb{R}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Demuestre que:

*a*) $S_\lambda = \{x \in E : f(x) \leq \lambda\}$ es cerrado en $E$.

*b*) $I_\lambda = \{x \in E : f(x) = \lambda\}$ es cerrado en $E$.

*c*) $A_\lambda = \{x \in E : f(x) < \lambda\}$ es abierto en $E$.

**P26.** Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función continua y definamos $g : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ como

$$g(x) = f\left(\frac{x}{\|x\|}\right)$$

*a*) Pruebe que $g$ alcanza su máximo y su mínimo en $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

*b*) Pruebe que $\lim_{x \to 0} g(x)$ existe si y solo si $f$ es constante en $\partial B(0, 1) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$.

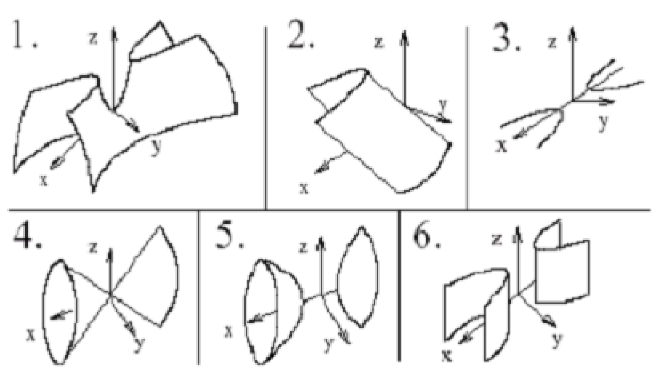
**P27.** Para cada una de las siguientes ecuaciones, ¿qué gráfico corresponde al conjunto solución de cada una de ellas?

*a*) $z = x - y^2$

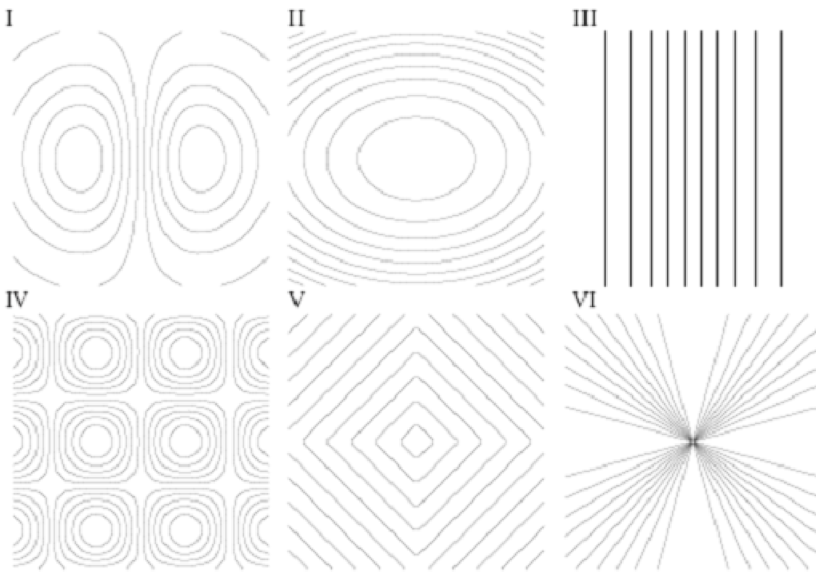
*b*) $z = x^2 - y^2$

*c*) $1 - x^2 - y^2$

*d*) $z^2 = x^2 - y^2$



**P28.** Asocie cada gráfico de curvas de nivel con la función correspondiente:




| | |
|---|---|
| | $f(x,y) = \sin(x)$ |
| | $f(x,y) = x^2 + 2y^2$ |
| | $f(x,y) = \lvert x\rvert + \lvert y\rvert$ |
| | $f(x,y) = \sin(x)\cos(y)$ |
| | $f(x,y) = xe^{-x^2-y^2}$ |
| | $f(x,y) = x^2/(x^2+y^2)$ |

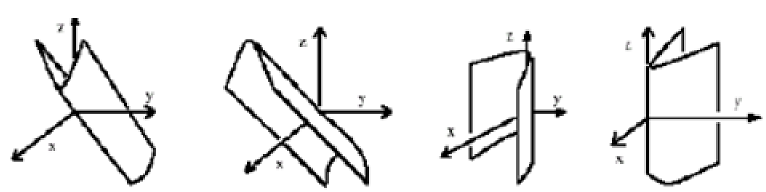
**P29.** Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = x + y^2$.

*a*) Grafique las curvas de nivel. Detalle los casos $c = 0$, $c = 1$ y $c = -1$.

*b*) Grafique la proyección del grafo de $f$ sobre el plano $x = 0$.

*c*) Grafique la proyección del grafo de $f$ sobre el plano $y = 0$.

*d*) ¿Cuál de los siguientes dibujos corresponde al gráfico de $f$?



**P30.** Sea $f$ una función continua y biyectiva, de un compacto $A$ de un evn $E$ en un conjunto $B$ de un evn $F$. Demuestre que la función $f^{-1} : B \to A$ es continua.