

Cálculo en Varias Variables

Auxiliar 4 - Primavera 2010

Prof: Marcelo Leseigneur Aux: Víctor Verdugo - Sebastián Bustamante F.

Definición 1: Un *espacio topológico* es un par $(X, \mathcal{T})$, donde X es un conjunto y $\mathcal{T}$ es una familia de subconjuntos de X tal que

1. $\emptyset, X \in \mathcal{T}$;
2. Si A es un conjunto de índices arbitrarios y $U_\alpha \in \mathcal{T}$ para todo $\alpha \in A$, entonces $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \in \mathcal{T}$; y
3. Si $U, V \in \mathcal{T}$, entonces $U \cap V \in \mathcal{T}$.

A los conjuntos de $\mathcal{T}$ se les llama *abiertos* y a sus complementos se les llama *cerrados*.

Definición 2: Diremos que un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ es *Hausdorff* si para cada par de puntos distintos $x, y \in X$, existen conjuntos $U_x, U_y \in \mathcal{T}$ tales que $x \in U_x, y \in U_y$ y $U_x \cap U_y = \emptyset$.

Definición 3: Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y $A \subset X$. Una familia de subconjuntos $\{U_i : i \in I\}$ se dice *recubrimiento abierto* de A si cada U_i es abierto y $A \subset \bigcup_i U_i$. Si $J \subset I$ tal que $A \subset \bigcup_{i \in J} U_i$, entonces decimos que $\{U_i : i \in J\}$ es un *subrecubrimiento* del recubrimiento abierto de A .

Definición 4: Un subconjunto $K \subset X$ de un espacio topológico se dice *compacto* si todo recubrimiento abierto de K admite un subrecubrimiento finito.

P1. Pruebe que todo espacio vectorial normado¹ es un espacio topológico.

P2. Pruebe que todo espacio vectorial normado es Hausdorff.

P3. Sean K_1, K_2 subconjuntos compactos disjuntos de un espacio topológico Hausdorff. Pruebe que existen abiertos U, V tales que $K_1 \subset U, K_2 \subset V$ y $U \cap V = \emptyset$.

Solución:

Sea $(X, \mathcal{T})$ el espacio topológico Hausdorff y $x \in K_1$. Como $(X, \mathcal{T})$ es Hausdorff, para cada $y \in K_2$ existen abiertos V_{xy}, V_{yx} , tales que $x \in V_{xy}, y \in V_{yx}$ y $V_{xy} \cap V_{yx} = \emptyset$. Luego,

$$K_2 \subset \bigcup_{y \in K_2} V_{yx},$$

por lo que $\bigcup_{y \in K_2} V_{yx}$ recubre a K_2 y como éste conjunto es compacto, existen $y_1, \dots, y_n \in K_2$ tales que

$$K_2 \subset \bigcup_{i=1}^n V_{y_i x} \text{ (subrecubrimiento finito).}$$

Luego, tenemos que

$$V_x = \bigcap_{i=1}^n V_{xy_i} \in \mathcal{T} \quad \wedge \quad V_x \cap \underbrace{\bigcup_{i=1}^n V_{y_i x}}_{R_{K_2}(x)} = \emptyset.$$

De este modo, para todo x existe un abierto V_x que lo contiene y un abierto $R_{K_2}(x)$ que contiene a K_2 tales que $V_x \cap R_{K_2}(x) = \emptyset$.

¹Todas las propiedades de la auxiliar cuyo enunciado dice "espacio vectorial normado" también son válidas para espacios métricos.

Haciendo esto para cada x , obtenemos un recubrimiento de K_1 formado por $\bigcup_{x \in K_1} V_x$, por lo que existen $x_1, \dots, x_m \in K_1$ tales que $K_1 \subset \bigcup_{i=1}^m V_{x_i} \in \mathcal{T}$. Tomando $\bigcap_{i=1}^m R_{K_2}(x_i) \in \mathcal{T}$, tenemos que

$$K_2 \subset \bigcap_{i=1}^m R_{K_2}(x_i) \quad \wedge \quad \bigcup_{i=1}^m V_{x_i} \cap \bigcap_{i=1}^m R_{K_2}(x_i) = \emptyset,$$

con lo que se prueba lo pedido.

P4. Pruebe que en un espacio vectorial normado, todo subconjunto compacto es cerrado y acotado.

P5. Considere el espacio $(C([0, 1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$, la sucesión de funciones

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x < 1 - \frac{1}{n} \\ \frac{1}{\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}}(x - 1 + \frac{1}{n}) & \text{si } 1 - \frac{1}{n} \leq x < 1 - \frac{1}{n+1} \\ 1 & \text{si } 1 - \frac{1}{n+1} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

y pruebe que no tiene una subsucesión convergente. Esto muestra que no todo conjunto cerrado y acotado es compacto².

P6. Considere $A = \mathbb{R} \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2$. Encuentre la frontera, interior y adherencia de A .

P7. Considere el conjunto

$$B = \{x^2 + y^2 < 1, y > 0\} \cup \{-1 \leq x \leq 1, y = 0\} \cup \{x^2 + y^2 = 1, y < 0\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Encuentre la frontera, interior y adherencia de B .

²Este resultado se tiene pues el espacio $C([0, 1], \mathbb{R})$ no es de dimensión finita. En dimensión finita es cierto que todo cerrado y acotado es compacto. En $\mathbb{R}^n$ este resultado se conoce como Teorema de Heine-Borel.