

MA2001-1 Cálculo en Varias Variables. Semestre 2010-2
Profesor: Marcelo Leseigneur **Auxiliar:** Víctor Verdugo

Auxiliar 3

Martes 31 de Agosto de 2010

P1. Diremos que $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una familia decreciente de conjuntos si $A_{n+1} \subseteq A_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

- De un ejemplo en $\mathbb{R}$ de una familia decreciente de conjuntos acotados (no vacíos) cuya intersección sea vacía.
- De un ejemplo en $\mathbb{R}$ de una familia decreciente de conjuntos cerrados (no vacíos) cuya intersección sea vacía.

P2. Dados dos conjuntos A, B en un evn $(E, \|\cdot\|)$, demuestre que:

- $\text{int}(A \cap B) = \text{int}A \cap \text{int}B$
- $\text{int}(A \cup B) \supset \text{int}A \cup \text{int}B$ (de un ejemplo donde no hay igualdad)
- $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
- $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$ (de un ejemplo donde no hay igualdad)

P3. Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach y $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión decreciente de cerrados no vacíos. Suponga que

$$\text{diam}(F_n) = \sup\{\|x - y\| : x, y \in F_n\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Pruebe que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n$ es un singleton.

P4. Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio vectorial normado, y $A, B \subseteq E$ cerrados. Pruebe que existen θ_A, θ_B abiertos tales que $A \subset \theta_A$, $B \subset \theta_B$ y $\theta_A \cap \theta_B = \emptyset$.

P5. Consideremos el espacio vectorial $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de las matrices de 2×2 a coeficientes en $\mathbb{R}$. Se define la función $\|\cdot\|_\infty : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}_+$ como

$$\|A\|_\infty = \max_{i \in \{1,2\}} \left\{ \sum_{j=1}^2 |a_{ij}| \right\}$$

- Pruebe que $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ es un espacio vectorial normado.
- Estudie la convergencia de la sucesión $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ definida por

$$A_n = \begin{pmatrix} (-1)^n & \frac{1}{n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

P6. Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto y $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

- Pruebe que el conjunto $A + x_0 = \{a + x_0 : a \in A\}$ es abierto.
- Concluya que $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$ es abierto independiente de la naturaleza de B .