MA2001-2 Cálculo en Varias Variables. Semestre 2010-1

Profesor: Marcelo Leseigneur Auxiliar: Víctor Verdugo

Tarea 1

Fecha de entrega: Martes 7 de Septiembre, al comienzo de la clase auxiliar.

P1. Dado el conjunto $A = [0, 1[$ en $\mathbb{R}$, encuentre una familia de abiertos $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ cuya unión contenga al conjunto A y tal que no exista un número finito de ellos cuya unión contenga a A .

P2. Determine el interior y la adherencia de cada uno de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$:

$$A = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_2 > x_1\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{R}^2 : 0 < \|x\|_2 \leq 1\}$$

$$C = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 = x_2, x_1 > 0\}$$

$$D = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 \in \mathbb{Q}\}$$

$$E = \left(\frac{1}{k}, (-1)^k \right)_{k \in \mathbb{N}}$$

P3. Dados dos conjuntos A, B en un evn $(E, \|\cdot\|)$, demuestre que:

a) $\text{int}(A \cap B) = \text{int}A \cap \text{int}B$

b) $\text{int}(A \cup B) \supset \text{int}A \cup \text{int}B$ (de un ejemplo donde no hay igualdad)

c) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

d) $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$ (de un ejemplo donde no hay igualdad)

P4. Estudie si las siguientes funciones son normas en $\mathbb{R}^2$:

a) $\|(x, y)\| = \sqrt{4x^2 + y^2}$

b) $\|(x, y)\| = \sqrt{|x| + |y|}$

c) $\|(x, y)\| = |x| + |\sqrt[3]{x^3 + y^3}|$

d) $\|(x, y)\| = \sqrt{(x - y)^2 + y^2}$

P5. Sea $(\mathcal{C}([0, 2], \mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$ y la siguiente sucesión decreciente de funciones continuas dada por

$$f_n(x) := \begin{cases} x^n & \text{si } x \in [0, 1] \\ 1 & \text{si } x \in [1, 2] \end{cases}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Pruebe que $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es $\|\cdot\|_1$ -Cauchy, pero que no converge. Para ello, pruebe y utilice que

$$\int_0^2 |f_{n+h} - f_n| \leq \int_0^1 f_n = \frac{1}{n+1}$$

para todo $n, h \in \mathbb{N}$. Determine además el límite puntual de la sucesión. ¿Qué sucede en $(\mathcal{C}([0, 2], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$? ¿Converge? ¿Es de Cauchy? justifique. ¿Son equivalentes dichas normas sobre $\mathcal{C}([0, 2], \mathbb{R})$?

P6. Si A es un conjunto en un evn $(E, \|\cdot\|)$ con la propiedad $\overline{A} = E$ y $\text{int}A = \emptyset$, entonces el conjunto A^c posee la misma propiedad. Usando esto, pruebe que los irracionales son densos en $\mathbb{R}$, es decir, $\overline{\mathbb{I}} = \mathbb{R}$.

P7. Sea $(E, \|\cdot\|)$ un evn. Demuestre que:

- a) Si $x_0 \in E$ y $r > 0$, entonces $B(x_0, r) = \{x \in E : \|x - x_0\| < r\}$ es abierto.
- b) Si $(E, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach, y $F \subseteq E$ un conjunto cerrado, entonces el sevn $(F, \|\cdot\|)$ también es de Banach.
- c) Si $x_0 \in E$, entonces $\{x_0\}$ es cerrado.

P8. Consideremos el espacio vectorial $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de las matrices de 2×2 . Se define la función $\|\cdot\|_\infty : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq 2} \left\{ \sum_{j=1}^2 |a_{ij}| \right\}$$

- a) Pruebe que $\|\cdot\|_\infty$ es norma en $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
- b) Estudie la convergencia de la sucesión $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ definida por

$$A_n = \begin{bmatrix} (-1)^n & \frac{1}{n} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

P9. Sea $(E, \|\cdot\|)$ un evn. Definamos $\|x\|_L = \|L(x)\|$, donde L es una función lineal de E en E , y además $L(x) = 0$ si y solo si $x = 0$. Pruebe que $\|\cdot\|_L$ es una norma sobre E .

P10. Sea $(E, \|\cdot\|)$ un evn, y $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en E . Pruebe que es acotada.

P11. Sea $(E, \|\cdot\|)$ un evn, y $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en E . Pruebe que si la sucesión posee una subsucesión convergente, entonces la sucesión converge a ese punto.

P12. Sea $(E, \|\cdot\|)$ un evn, y $F \subseteq E$. Diremos que F es compacto, si para toda sucesión de elementos en F , esta posee una subsucesión convergente a un elemento en F .

- a) Pruebe que todo compacto en un evn es cerrado y acotado.
- b) Pruebe que todo subconjunto cerrado de un compacto, es compacto también.
- c) Sea $E = \mathbb{R}^n$. Pruebe que todo cerrado y acotado es compacto.

P13. Sea $(E, \|\cdot\|)$ un evn, y $A \subseteq E$. Consideremos $\Theta = \{\mathcal{O} \subseteq A : \mathcal{O} \text{ es abierto}\}$. Pruebe que $\text{int}(A) = \bigcup_{\mathcal{O} \in \Theta} \mathcal{O}$, es decir, el interior de A es la unión de todos los abiertos contenidos en A .

P14. Sea $(E, \|\cdot\|)$ un evn, y $A \subseteq E$. Consideremos $\Pi = \{F \supseteq A : F \text{ es cerrado}\}$. Pruebe que $\text{adh}(A) = \bigcap_{F \in \Pi} F$, es decir, la adherencia de A es la intersección de todos los cerrados que contienen a A .

P15. Sea $(E, \|\cdot\|)$ un evn, y $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en un compacto de E . Pruebe que la sucesión converge.

P16. Sea $\{C_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ una familia decreciente de compactos (ie, $C_{i+1} \subseteq C_i$), no vacíos, en $\mathbb{R}^n$. Pruebe que $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} C_i \neq \emptyset$.

P17. Consideremos el evn $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$. Dado $C \subset \mathbb{R}^n$ y $r > 0$ un real fijo, se llama distancia de $x \in \mathbb{R}^n$ a C a

$$d(x, C) = \inf\{\|x - c\| : c \in C\}$$

Sea $C_r = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, C) < r\}$. Pruebe que C_r es abierto.

P18. Sea $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left\{ \frac{1}{n+1} \right\}$ y $B = A \cup \{0\}$. Pruebe que A no es abierto ni cerrado, y que B es cerrado.

P19. Sea $(E, \|\cdot\|)$ un evn, y $x \in E$ fijo. Se define la distancia de x a $A \subseteq E$ como $d_A(x) = \inf\{\|x - y\| : y \in A\}$. Pruebe que $\text{adh}(A) = \{x \in E : d_A(x) = 0\}$.

P20. Considere el espacio $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$. Para cada conjunto A , determine interior, adherencia y frontera. Indique si son abiertos o cerrados, y dibuje cada conjunto.

a) $A = \{(x_1, x_2) : x_1 \cdot x_2 = 0\}$

b) $A = \{(x_1, x_2) : x_1 + x_2 = 1, x_1^2 + x_2^2 < 1\}$

c) $A = \{(x_1, x_2) : x_1^2 - x_2^2 < 1\}$

c) $A = \{(x_1, x_2) : |x_2| < 1, x_1 \leq x_2\}$

P21. Sea el evn $(\mathbb{R}, \|\cdot\|)$. Pruebe que el conjunto $S = \{y \in \mathbb{R}^n : \|y\| = 1\}$ es cerrado.

P22. Para los siguientes conjuntos, determine interior adherencia y frontera.

a) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 1, x^2 + y^2 < 1\}$

b) $B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (n, n+1)$

c) $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = r^2, 0 < r < 1, r \in \mathbb{Q}\}$

P23. Sean A y B dos subconjuntos no vacíos de $\mathbb{R}^n$, tal que A es abierto. Pruebe que $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$ es abierto, sin importar la naturaleza de B .

P24. Definición. Una función $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ se dirá Lipschitziana en A si existe una constante $k > 0$, llamada constante de Lipschitz, tal que $\|f(x) - f(y)\| \leq k\|x - y\|, \forall x, y \in A$.

Definición. Una función $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ se dirá contractante en A , si es Lipschitziana con constante de Lipschitz $k < 1$.

i) **Teorema del punto fijo de Banach**

Si $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow A$ es contractante, y A cerrado, entonces existe un único $a \in A$ tal que $f(a) = a$. El elemento a , se llama punto fijo de f en A . Para probar este teorema, considere un $a_0 \in A$ cualquiera, y considere la sucesión $a_{n+1} = f(a_n), \forall n \in \mathbb{N}$.

a) Demuestre que $\|a_{n+1} - a_n\| \leq k^n \|a_1 - a_0\|$.

b) Pruebe que $\|a_{n+p} - a_n\| \leq \frac{k^n}{1-k} \|a_1 - a_0\|$, para todo $p \in \mathbb{N}$. Concluya que la sucesión $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy.

c) Demuestre que $\exists a \in A$ tal que $a_n \rightarrow a$, y $f(a) = a$.

d) Pruebe que a es único.

P25. Sea $E = \mathbb{R}[X]$ el espacio de los polinomios a coeficientes reales. Considere las siguientes aplicaciones:

i) $N_\infty : E \rightarrow \mathbb{R}_+$, definida por $N_\infty(p) = \sup_{0 \leq i \leq q} |a_i|$, donde $p(x) = \sum_{i=0}^q a_i x^i$.

ii) $\Phi : E \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\Phi(p) = p(1)$.

a) Mostrar que N_∞ es una norma sobre E .

b) Mostrar que Φ es lineal.

c) Considere la familia de polinomios $p_n(x) = 1 + x^2 + \dots + x^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Calcule $N_\infty(p_n)$ y $\Phi(p_n)$.

d) Deduzca que Φ no es continua en (E, N_∞) .

e) Sea $k \in \mathbb{N}$ fijo. Considere el subespacio vectorial $F = \mathbb{R}_k[X]$ de E correspondiente a los polinomios de grado menor o igual a k . Se dota a F de la norma N_∞ y se considera $\Phi|_F$ la restricción de Φ a F , es decir, $\Phi|_F : F \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\Phi(p) = p(1)$. Pruebe que $\Phi|_F$ es continua.

P26. Considere el espacio de Hilbert $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Sean $M, N \subseteq H$ subespacios cerrados. Suponga que $M \perp N$, es decir, $\langle x, y \rangle = 0$, $\forall x \in M$ y $\forall y \in N$. Sea $M + N = \{z \in H : \exists x \in M, \exists y \in N \text{ tal que } z = x + y\}$. Pruebe que $M + N$ es cerrado.

P27. Sea $E = \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ el conjunto de las matrices de $m \times n$ a coeficientes reales. Se define para $A, B \in E$ la función

$$\langle A, B \rangle = \text{Tr}(AB^t)$$

donde $\text{Tr}(\cdot)$ es la traza de una matriz, y B^t es la matriz traspuesta de B . Pruebe que esta función es un producto interno en E .

P28. Consideremos $\mathbb{R}^n$ con el producto interno usual. Sea $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sucesiones en la bola unitaria abierta $B(0, 1) \subseteq \mathbb{R}^n$ y supongamos que $\langle x_n, y_n \rangle \rightarrow 1$. Pruebe que $\|x_n - y_n\| \rightarrow 0$.

P29. Demuestre que la norma en un espacio vectorial E , que proviene de un producto interno, verifica la igualdad del paralelogramo

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \quad \forall x, y \in E$$

Además pruebe que si E es un evn sobre $\mathbb{R}$, entonces se cumple la identidad polar, es decir

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$$

P30. Consideremos el espacio de Banach $(\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$, y $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$, tal que $\|f - f_n\|_\infty \rightarrow 0$. Pruebe que

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_n \int_a^b f_n(x) dx$$