

MA2001-1 Cálculo en Varias Variables. Semestre 2010-2
Profesor: Marcelo Leseigneur **Auxiliar:** Víctor Verdugo

Auxiliar 2

Martes 24 de Agosto de 2010

P1. Sea un espacio vectorial X sobre $\mathbb{R}$ y $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ normas en ese espacio. Diremos que estas normas son *equivalentes* si existen $\alpha, \beta > 0$ tales que

$$\alpha\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \beta\|x\|_1$$

para todo $x \in X$. Denotemos por $B_1(x, r) = \{y \in X : \|x - y\|_1 < r\}$ y $B_2(x, r) = \{y \in X : \|x - y\|_2 < r\}$.

a) Pruebe que si $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ son equivalentes, entonces para todo $x \in X$ y para todo $\epsilon > 0$, existen $\delta_1, \delta_2 > 0$ tales que

$$B_1(x, \delta_1) \subset B_2(x, \epsilon)$$

$$B_2(x, \delta_2) \subset B_1(x, \epsilon)$$

b) Ahora suponga que existen $\epsilon, \delta > 0$ tales que

$$B_1(0, \delta) \subset B_2(0, 1)$$

$$B_2(0, \epsilon) \subset B_1(0, 1)$$

Pruebe que $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ son equivalentes.

P2. Sea $E = \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$ el espacio vectorial de las funciones definidas en el intervalo $[0, 1]$, derivables, y con derivada continua. Considere la siguiente aplicación:

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_E : \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R}) &\rightarrow \mathbb{R}_+ \\ f &\mapsto \|f\|_E = |f(0)| + \|f'\|_\infty \end{aligned}$$

a) Pruebe que $(E, \|\cdot\|_E)$ es un espacio vectorial normado.

b) Pruebe que $\|f\|_\infty \leq \|f\|_E$, para todo $f \in E$.

c) Mostrar que no existe ninguna constante positiva M tal que $\|f\|_E \leq M\|f\|_\infty$ para todo $f \in E$.

d) Concluya.

P3. Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio vectorial normado. Diremos que un conjunto $\theta \subseteq X$ es *abierto* si para todo $x \in \theta$, existe $B(x, \epsilon) \subset \theta$, para algún $\epsilon > 0$. Sea $\tau = \{\theta \subset X : \theta \text{ es abierto}\}$. Pruebe las siguientes afirmaciones:

1) Si $\{\theta_i\}_{i=1}^n \subset \tau$, es decir, dada una familia finita de abiertos, se tiene que:

$$\bigcap_{i=1}^n \theta_i \in \tau$$

2) Si $\{\theta_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subset \tau$, es decir, dada una familia cualquiera de abiertos, se tiene que:

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \theta_\lambda \in \tau$$

3) $\emptyset \in \tau$ y $X \in \tau$.