MA2001-1 Cálculo en Varias Variables. Semestre 2010-2
Profesor: Marcelo Leseigneur **Auxiliar:** Víctor Verdugo

Pauta Auxiliar 1

Martes 17 de Agosto de 2010

P3. Dado $p \in [1, +\infty)$, se definen los siguientes espacios:

$$\begin{aligned} \ell^p &= \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R} : \sum |x_n|^p < +\infty\} \\ \ell^\infty &= \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R} : \sup_n |x_n| < +\infty\} \\ c_0 &= \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R} : \lim_n x_n = 0\} \end{aligned}$$

Consideremos ahora las aplicaciones $\|\cdot\|_p : \ell^p \to \mathbb{R}_+$ y $\|\cdot\|_\infty : \ell^\infty \to \mathbb{R}_+$ definidas por:

$$\begin{aligned} \|x\|_p &= \left(\sum_n |x_n|^p\right)^{1/p} \\ \|x\|_\infty &= \sup_n |x_n| \end{aligned}$$

donde $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$

a) Pruebe que $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$ es un espacio vectorial normado.

Probemos que $\|\cdot\|_p : \ell^p \to \mathbb{R}_+$ es una norma en ℓ^p :

- Sea $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^p$. Por definición de este espacio, se tiene que:

$$\sum_n |x_n|^p < +\infty \Rightarrow \left(\sum_n |x_n|^p\right)^{1/p} < +\infty \Rightarrow \|x\|_p < +\infty$$

- Sea $\lambda \in \mathbb{R}$ y $x \in \ell^p$. Luego:

$$\|\lambda x\|_p = \left(\sum_n |\lambda x_n|^p\right)^{1/p} = \left(\sum_n |\lambda|^p |x_n|^p\right)^{1/p} = |\lambda| \left(\sum_n |x_n|^p\right)^{1/p} = |\lambda| \|x\|_p \tag{1}$$

- Si $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} = 0$, entonces $x_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}$, y por lo tanto $\|x\|_p = \left(\sum_n |x_n|^p\right)^{1/p} = 0$. Supongamos ahora que $\|x\|_p = 0$. Entonces:

$$0 \leq |x_n| \leq \left(\sum_n |x_n|^p\right)^{1/p} = 0$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, y por lo tanto $x = 0$.
- Finalmente, probaremos la desigualdad triangular. Para ello, previamente demostraremos la siguiente desigualdad:
(Minkowski) Sea $p \in [1, +\infty)$ y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$,$(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$. Entonces, para todo $m \in \mathbb{N}$:

$$\left(\sum_{i=1}^m |x_i + y_i|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^m |x_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^m |y_i|^p\right)^{1/p}$$

El caso $p = 1$ es trivial. Es consecuencia directa de la desigualdad triangular para el valor absoluto. Consideremos entonces $p \in (1, +\infty)$ y q su Holder-conjugado, es decir, $(p-1)q = p$ (esta expresión es equivalente a la definición dada en la **P1**). Luego:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{m} |x_i + y_i|^p &= \sum_{i=1}^{m} |x_i + y_i|^{p-1} |x_i + y_i| \\
&\leq \sum_{i=1}^{m} |x_i + y_i|^{p-1} (|x_i| + |y_i|) \\
&= \sum_{i=1}^{m} |x_i + y_i|^{p-1} |x_i| + \sum_{i=1}^{m} |x_i + y_i|^{p-1} |y_i| \\
&\leq \left(\sum_{i=1}^{m} |x_i + y_i|^{(p-1)q} \right)^{1/q} \left(\sum_{i=1}^{m} |x_i|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{m} |x_i + y_i|^{(p-1)q} \right)^{1/q} \left(\sum_{i=1}^{m} |y_i|^p \right)^{1/p} \\
&= \left(\sum_{i=1}^{m} |x_i + y_i|^{p} \right)^{1/q} \left[\left(\sum_{i=1}^{m} |x_i|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{m} |y_i|^p \right)^{1/p} \right]
\end{aligned}$$

Dividiendo a ambos lados de la desigualdad por el término $\left(\sum_{i=1}^{m} |x_i + y_i|^{p} \right)^{1/q}$ (es estrictamente positivo, asi que no altera el sentido de la desigualdad), se obtiene que:

$$\left(\sum_{i=1}^{m} |x_i + y_i|^{p} \right)^{1-1/q} = \left(\sum_{i=1}^{m} |x_i + y_i|^{p} \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^{m} |x_i|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{m} |y_i|^p \right)^{1/p}$$

probando asi la desigualdad. Notemos ahora que si $M \geq m$, entonces:

$$\left(\sum_{i=1}^{m} |x_i + y_i|^{p} \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^{M} |x_i|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{M} |y_i|^p \right)^{1/p}$$

Haciendo $M \to +\infty$ obtenemos que:

$$\left(\sum_{i=1}^{m} |x_i + y_i|^{p} \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^{+\infty} |x_i|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{+\infty} |y_i|^p \right)^{1/p} = \|x\|_p + \|y\|_p$$

Como la desigualdad vale para todo $n \in \mathbb{N}$, hacemos $n \to +\infty$, para obtener finalmente la desigualdad triangular, es decir:

$$\|x + y\|_p \quad \leq \quad \|x\|_p + \|y\|_p \tag{2}$$

Hemos probado entonces que $\|\cdot\|_p$ es una norma en ℓ^p. El hecho de que ℓ^p es espacio vectorial se desprende de (1) y (2).

b) Pruebe que $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ es un espacio vectorial normado.

Probemos que $\|\cdot\|_{+\infty} : \ell^p \to \mathbb{R}_+$ es una norma en ℓ^∞ :

- Sea $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty$. Por definición del espacio, tenemos que:

$$\sup_n |x_n| < +\infty \Rightarrow \|x\|_\infty < +\infty$$

- Sea $\lambda \in \mathbb{R}$ y $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty$. Luego:

$$\|\lambda x\|_\infty = \sup_n |\lambda x_n| = |\lambda| \sup_n |x_n| = |\lambda| \|x\|_\infty \tag{3}$$

- Sea $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} = 0$. Como $x_n = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $\|x\|_\infty = \sup_n |x_n| = 0$. Supongamos ahora que $\|x\|_\infty = 0$. Probemos que $x = 0$. En efecto:

$$0 \leq |x_n| \leq \sup_n |x_n| = 0$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, y por lo tanto $x = 0$.

- Sean $x, y \in \ell^\infty$. Luego:
$$|x_n + y_n| - |y_n| \leq |x_n| \leq \sup_n |x_n| = \|x\|_\infty$$
Dado que $x \in \ell^\infty$, tenemos que $\|x\|_\infty < +\infty$, y por lo tanto:
$$|x_n + y_n| - \|x\|_\infty \leq |y_n| \leq \sup_n |y_n| = \|y\|_\infty$$
De igual manera, como $y \in \ell^\infty$, tenemos que $\|y\|_\infty < +\infty$, y por lo tanto:
$$|x_n + y_n| \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$$
Como esta desigualdad vale para todo $n \in \mathbb{N}$, también vale para el supremo y por lo tanto:
$$\|x + y\|_\infty \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty \tag{4}$$

Se concluye entonces que efectivamente $\|\cdot\|_\infty$ es una norma en ℓ^∞. El hecho de que sea espacio vectorial es consecuencia de (3) y (4).

c) Pruebe que c_0 es un subespacio vectorial de ℓ^∞.

Sea $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0$, es decir, $\lim_n x_n = 0$. Probaremos que x es una sucesión acotada y en consecuencia, que está en ℓ^∞. En efecto, por la convergencia tenemos que $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0$, $|x_n| \leq 1$. Luego:
$$|x_n| \leq \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_{n_0-1}|, 1\} < +\infty$$
para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces también vale para el supremo, es decir, $\|x\|_\infty = \sup_n |x_n| < +\infty$, y por lo tanto $x \in \ell^\infty$. Si $x, y \in c_0$, es claro que $\lambda x + y \in c_0$ y por lo tanto es un subespacio vectorial de ℓ^∞.