

MA2001-1 Cálculo en Varias Variables. Semestre 2010-2

Profesor: Marcelo Leseigneur Auxiliar: Víctor Verdugo

Auxiliar 1

Martes 17 de Agosto de 2010

P1. Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$ y $p, q \in \overline{\mathbb{R}}$ Holder-conjugados, es decir, $p, q \in [1, +\infty]$ y $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Pruebe que

$$\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \|x\|_p \|y\|_q$$

Para ello, puede serle útil probar primero que dados $a, b \geq 0$ y p, q Holder-conjugados, entonces

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

P2. Consideremos $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}) = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ es continua}\}$, es decir, el espacio de las funciones continuas de $[0, 1]$ en $\mathbb{R}$. Se definen sobre este espacio las siguientes aplicaciones:

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_\infty : \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}) &\rightarrow \mathbb{R}_+ \\ f &\mapsto \|f\|_\infty = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)| \\ \|\cdot\|_1 : \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}) &\rightarrow \mathbb{R}_+ \\ f &\mapsto \|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)| dx \end{aligned}$$

- Pruebe que $(\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ y $(\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$ son espacios vectoriales normados.
- Pruebe que $\|f\|_1 \leq \|f\|_\infty$, $\forall f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$.
- Pruebe que no existe $M > 0$ tal que $\|f\|_\infty \leq M\|f\|_1$, $\forall f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$.

P3. Dado $p \in [1, +\infty)$, se definen los siguientes espacios:

$$\begin{aligned} \ell^p &= \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R} : \sum_n |x_n|^p < +\infty\} \\ \ell^\infty &= \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R} : \sup_n |x_n| < +\infty\} \\ c_0 &= \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R} : \lim_n x_n = 0\} \end{aligned}$$

Consideremos ahora las aplicaciones $\|\cdot\|_p : \ell^p \rightarrow \mathbb{R}_+$ y $\|\cdot\|_\infty : \ell^\infty \rightarrow \mathbb{R}_+$ definidas por:

$$\begin{aligned} \|x\|_p &= \left(\sum_n |x_n|^p \right)^{1/p} \\ \|x\|_\infty &= \sup_n |x_n| \end{aligned}$$

donde $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$

- Pruebe que $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$ es un espacio vectorial normado.
- Pruebe que $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ es un espacio vectorial normado.
- Pruebe que c_0 es un subespacio vectorial de ℓ^∞ .