



Examen

P1. (a) Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 8 & 8 & 2 & -2 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$.

(a1) Encuentre todas las soluciones de $Ax = b$.

(a2) Dé bases para $\text{Ker}(A)$, $\text{Im}(A)$ y sus respectivas dimensiones.

(b) Sea $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(b1) Determine los valores propios y subespacios propios de A . ¿Es A diagonalizable? Justifique.

(b2) Calcule los coeficientes de A^n , en función de n .

P2. (a) Sea S el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ generado por $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$. Considere $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

lineal t.q. $\text{Ker}(L) = S$ y $L \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Dado $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ un vector cualquiera de $\mathbb{R}^3$, encontrar

$L \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ y la matriz de L con respecto a la base canónica.

(b) Sea $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una transformación lineal **no nula**.

(b1) Muestre que $\dim \text{Ker}(T) = n - 1$.

(b2) Sea $\{v\}$ una base de $(\text{Ker}(T))^\perp$. Muestre que $T(v) \neq 0$.

(b3) Sea $w = \frac{T(v)}{\|v\|^2} v$, con v el vector de la base de la parte (b2). Muestre que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad T(x) = \langle w, x \rangle.$$

Indicación: Descomponga $x \in \mathbb{R}^n$ de acuerdo a la suma directa $\mathbb{R}^n = \text{Ker}(T) \oplus (\text{Ker}(T))^\perp$.

P3. Sean $1 \leq k < n$ naturales y $M \in \mathcal{M}_{nk}(\mathbb{R})$ de rango k (de lo que se desprende que sus columnas son l.i.).

(a) Verifique que para $x \in \mathbb{R}^n$, $x^t(M^t M)x = \|Mx\|^2$ y deduzca que $M^t M$ es definida positiva.

(b) Sea $P = M(M^t M)^{-1}M^t$. Muestre que

(b1) P es simétrica.

(b2) $P^2 = P$.

(b3) $PM = M$.

(b4) Para cada $x \in \mathbb{R}^n$ perpendicular a todas las columnas de M , $Px = 0$.

(c) Sea V el subespacio de $\mathbb{R}^n$ generado por las columnas de M . Muestre que V y $V^\perp$ son los subespacios propios de P y deduzca que los valores propios de P son **exactamente** los números 0 y 1.

(d) Muestre que $\text{tr}(P) = r(P) = k$, donde $r(P)$ es el rango de P y $\text{tr}(P)$ la traza de P .