Auxiliar 8: Álgebra Lineal

Profesor Auxiliar: Orlando Rivera Letelier
Jueves 14 de Octubre de 2010

P1. Sea V un espacio vectorial y $T : V \to V$ una transformación lineal tal que $T = T \circ T$.
Demostrar que $V = \ker(T) \oplus \mathrm{Im}(T)$.

P2. Denotamos por $\mathcal{P}_k$ el espacio vectorial de los polinomios a coeficientes reales de grado menor o igual que k.

a) Sea $L : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_4$ definida por $L(p)(x) = p(x)(x^2 + 1)$. Muestre que L es lineal.

b) Encuentre una base y la dimensión de $\ker(L)$ y de $\mathrm{Im}(L)$.

c) Demuestre que $\mathcal{P}_1 \oplus \mathrm{Im}(L) = \mathcal{P}_4$.

P3. *a*) Demuestre que la función $T : \mathbb{R}^4 \to \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ definida por

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ w \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y + w \\ 2x + 2y + z + w & x + y + z \end{pmatrix}$$

es lineal, y encuentra una base y la dimensión de $\ker(T)$ y de $\mathrm{Im}(T)$.

b) Sea $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ una transformación lineal tal que

$$\ker(L) = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle \qquad \text{y} \qquad L\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Encuentre en función de x_1, x_2, x_3 los valores de y_1, y_2 que satisfacen $L\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$.