

MA1101 Semestre Primavera 2010

Auxiliar: César Vigouroux G.

Auxiliar Extra Control #1

Miércoles 29 de septiembre

- Sean $p, d \in \mathbb{R}^3$, ambos no nulos. Se define: $L = \{x \in \mathbb{R}^3 / (x - p) \times d = 0\}$
 - Pruebe que $L = \{x \in \mathbb{R}^3 / x = p + \lambda d, \lambda \in \mathbb{R}\}$.
 - Sea $b \in \mathbb{R}^3, b \neq 0$ y no ortogonal a b . Determine qué condiciones deben satisfacer d y b para que la recta L de la parte anterior y el plano $\Pi = \{x \in \mathbb{R}^3 / \langle x, b \rangle = 0\}$ se intersecten.
- a) Sean p, q, r tres puntos en $\mathbb{R}^3$ no colineales. Sea π el plano que contiene a dichos puntos. Demuestre que

$$x \in \pi \Leftrightarrow \exists \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \text{ tales que } \alpha + \beta + \gamma = 1, x = \alpha p + \beta q + \gamma r$$

- b) Sean las rectas

$$L_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, L_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Pruebe que el plano que contiene a L_1, L_2 tiene ecuación cartesiana dada por $x + y - z = 1$

- Sea $P = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ y Π el plano de ecuación $2x - y - z = 2$.

- Sea $R \in \mathbb{R}^3$ la proyección ortogonal del punto P sobre el plano Π . Pruebe que $R = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
- Calcular la proyección ortogonal de P sobre la recta que pasa por R de dirección $d = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
- Sea Q la proyección calculada en la parte anterior. Determine la ecuación normal (o cartesiana) del plano que contiene a P, Q y R .

- Sea $\mathcal{P}_4$ el conjunto de los polinomios a coeficientes reales de grado menor o igual a 4. Definimos

$$V_1 = \{p \in \mathcal{P}_4 \mid p(1) + 2p(-1) = 0\}, V_2 = \{p \in \mathcal{P}_4 \mid p(x) = a + bx + cx^2 + bx^3 + ax^4 \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$$

- Pruebe que V_1, V_2 son s.e.v. de $\mathcal{P}_4$
 - Muestre que $V_1 = \langle \{1 + x^4, x + x^3, x^2\} \rangle$
- Sea $M_{n,n}$ el espacio de las matrices a coeficientes reales. Consideramos los conjuntos:

$$E = \{A = (a_{i,j})_{i,j} \in M_{n,n} \mid \text{existe } c \in \mathbb{R} \text{ tal que } \sum_{j=1}^n a_{i,j} = c \text{ para todo } 1 \leq n\}$$

$$E_0 = \{A = (a_{i,j})_{i,j} \in M_{n,n} \mid \sum_{j=1}^n a_{i,j} = 0 \text{ para todo } 1 \leq n\}$$

- Demuestre que E es s.e.v. de $M_{n,n}$

b) Demuestre que E_0 es s.e.v de E

c) Encuentre $\{A_1, \dots, A_{n(n-1)}\} \subseteq E_0$ que sean l.i y tales que $\langle \{A_1, \dots, A_{n(n-1)}\} \rangle = E_0$

6. Sea $A \in M_{n,n}$ una matriz invertible y U un s.e.v. estricto de $\mathbb{R}^n$. Se define

$$W = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \forall u \in U, \langle Au, Ay \rangle = 0\}$$

a) Probar que W es s.e.v. de $\mathbb{R}^n$ y que $W \cap U = \{0\}$

b) Sea $V = \{v \in \mathbb{R}^n \mid \exists u \in U, v = Au\}$. Pruebe que V es s.e.v. de $\mathbb{R}^n$

c) Probar que si $\{v_1 \dots v_k\} \subseteq V$ es un conjunto l.i tal que $\langle \{v_1 \dots v_k\} \rangle = V$ y $\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{i,j}$ entonces $\{u_1 \dots u_k\}$ definido por $u_i = A^{-1}v_i$ es l.i, $\langle \{u_1 \dots u_k\} \rangle = U$ y además $\langle Au_i, Au_j \rangle = \delta_{i,j}$

d) Probar que

$$w \in W \Leftrightarrow \forall i \in \{1, \dots, k\}, \langle Aw, Au_i \rangle = 0$$

e) Probar que si $v \in \mathbb{R}^n$ entonces $z = \sum_{i=1}^k \langle Av, Au_i \rangle u_i \in U$ y que $v - z \in W$

7. Sea $n \in \mathbb{N}$. Para un intervalo $[a, b) \subseteq [0, n)$, con $a, b \in \mathbb{N}$, definimos la función $\mathbb{1}_{[a,b)}$ indicatriz de $[a, b)$ por:

$$\mathbb{1}_{[a,b)}(x) := \begin{cases} 1, & x \in [a, b) \\ 0, & x \notin [a, b) \end{cases}$$

Sea $F([0, n), \mathbb{R})$ el e.v. de las funciones del intervalo $[0, n)$ en $\mathbb{R}$. Definimos $E \subseteq F([0, n), \mathbb{R})$ como el conjunto de las funciones constantes por pedazos de largos enteros, es decir:

$$f \in E \Leftrightarrow \forall i \in \{1, \dots, n\}, \exists \lambda_i \in \mathbb{R} : \forall x \in [0, n), f(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbb{1}_{[i-1, i)}(x)$$

a) Pruebe que $\forall a, b \in \mathbb{N}$ tal que $[a, b) \subseteq [0, n)$, $\mathbb{1}_{[a,b)} \in E$.

b) Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ una constante y $f \in E$. Pruebe que $\alpha f \in E$.

c) Pruebe que E es un s.e.v de $F([0, n), \mathbb{R})$.

d) Pruebe que el conjunto de funciones $B := \{\mathbb{1}_{[0,1)}, \dots, \mathbb{1}_{[n-1,n)}\}$ es l.i.

e) Pruebe que $E = \langle B \rangle$