

MA1101 Semestre Primavera 2010**Profesor:** Mauricio Telias **Auxiliares:** Orlando Rivera - César Vigouroux**Auxiliar # 5**

Lunes 27 de septiembre

P0. Sean $v_1, \dots, v_n$ vectores de $\mathbb{R}^n$, y $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ la matriz cuyas columnas son $v_1, \dots, v_n$. Pruebe que $\{v_1, \dots, v_n\}$ es un conjunto l.i. si y solo si A es invertible

P1. a) Pruebe que el conjunto de polinomios reales

$$\{1, (x-1), (x-1)(x-2), (x-1)(x-2)(x-3), \dots, \prod_{k=1}^n (x-k)\}$$

es l.i

b) Un conjunto $\{x_1, \dots, x_r\} \subset \mathbb{R}^n$ se dice ortogonal si $\forall i, j \leq r, i \neq j, \langle x_i, x_j \rangle = 0$. Sea $\{x_1, \dots, x_r\}$ ($r < n$) un conjunto ortogonal que cumple además $\|x_i\| = 1 \forall i$.

(i) Se define

$$x_{r+1} = y - \sum_{k=1}^r \langle y, x_k \rangle x_k,$$

con $y \in \mathbb{R}^n$. Pruebe que $\{x_1, \dots, x_{r+1}\}$ es ortogonal.

(ii) Demuestre que $\{x_1, \dots, x_{r+1}\}$ es l.i. .

P2. Sean E, F e.v sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Sea T una función $T : E \rightarrow F$, que satisface:

- (1) $T(0_E) = 0_F$. Donde 0_E y 0_F son los neutros aditivos en cada e.v.
- (2) $\forall x \in E, \forall \alpha \in \mathbb{K}: T(\alpha x) = \alpha T(x)$.
- (3) $\forall x, y \in E: T(x+y) = T(x) + T(y)$.

Considere $T(E) = \{y \in F \mid y = T(x), x \in E\}$

- a) Muestre que $T(E)$ es un s.e.v de F .
- b) Suponga además que T satisface que: $\forall x \in E, T(x) = 0 \Rightarrow x = 0$. Muestre que si $\{u_1, \dots, u_n\} \subseteq E$ es l.i, entonces $\{T(u_1), \dots, T(u_n)\} \subseteq F$ es l.i.
- c) Supongamos $E = F$. Sea $x_0 \in E$ tal que $T^m(x_0) = 0$, $T^{m-1}(x_0) \neq 0$ para algún entero positivo m . Muestre que $x_0, T(x_0), \dots, T^{m-1}(x_0)$ son linealmente independientes.

Nota: $T^m(x_0) = T(T \dots T(x_0))$ (la composición de T m veces) .

P3. Sea $n \in \mathbb{N}$. Para un intervalo $[a, b) \subseteq [0, n)$, con $a, b \in \mathbb{N}$, definimos la función $\mathbb{1}_{[a,b)}$ indicatriz de $[a, b)$ por:

$$\mathbb{1}_{[a,b)}(x) := \begin{cases} 1, & x \in [a, b) \\ 0, & x \notin [a, b) \end{cases}$$

Sea $F([0, n), \mathbb{R})$ el e.v. de las funciones del intervalo $[0, n)$ en $\mathbb{R}$. Definimos $E \subseteq F([0, n), \mathbb{R})$ como el conjunto de las funciones constantes por pedazos de largos enteros, es decir:

$$f \in E \Leftrightarrow \forall i \in \{1, \dots, n\}, \exists \lambda_i \in \mathbb{R} : \forall x \in [0, n), f(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbb{1}_{[i-1, i)}(x)$$

- Pruebe que $\forall a, b \in \mathbb{N}$ tal que $[a, b) \subseteq [0, n)$, $\mathbb{1}_{[a,b)} \in E$.
- Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ una constante y $f \in E$. Pruebe que $\alpha f \in E$.
- Pruebe que E es un s.e.v de $F([0, n), \mathbb{R})$.
- Pruebe que el conjunto de funciones $B := \{\mathbb{1}_{[0,1)}, \dots, \mathbb{1}_{[n-1,n)}\}$ es l.i.