Auxiliar 2: Álgebra Lineal

Profesor Auxiliar: Orlando Rivera Letelier
Martes 24 de Agosto de 2010

P1. Sea $J = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ y $\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

a) Pruebe que $J\mathbb{1} = n\mathbb{1}$ y $J^2 = nJ$.

b) Dado $\alpha \neq \frac{1}{n}$, encuentre β tal que $(I - \alpha J)^{-1} = I + \beta J$.

c) Verifique que $\left(I - \frac{1}{n}J\right)\mathbb{1} = \overrightarrow{0}$.

P2. *a)* Sean A y B matrices de $n \times m$ a coeficientes reales. Pruebe que

$$A = B \Leftrightarrow \left(\forall x \in \mathcal{M}_{1m}(\mathbb{R})\right)\left(\forall y \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})\right) \quad xAy = xBy.$$

b) Sean A y B matrices de $n \times n$ simétricas a coeficientes reales. Pruebe que

$$A = B \Leftrightarrow \left(\forall x \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})\right) \quad x^t A x = x^t B x.$$

P3. *a)* Demuestre que si una matriz cuadrada A verifica $A^k = I$, para algún natural $k \geq 1$, entonces A es invertible y determine su inversa.

b) Encuentre todas las matrices de la forma $A = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ que cumplen $A^2 = I$.

P4. Resuelva el siguiente sistema lineal:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} -x_1 & & & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 1, \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & - & 2x_4 & = & -1, \\ -x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & + & 3x_4 & = & 2, \\ -x_1 & - & 4x_2 & + & 2x_3 & + & 4x_4 & = & 5. \end{array}$$

P5. Resuelva el siguiente sistema lineal:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & = & 1, \\ -x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & = & 1, \\ & & 3x_2 & + & 3x_3 & & & = & 0, \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & - & 2x_4 & = & -2. \end{array}$$

P6. Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} & & x_2 & + & x_3 & & & = & 1, \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 1, \\ -x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & & & = & 4, \\ x_1 & + & 3x_2 & + & 3x_3 & + & 2x_4 & = & 3. \end{array}$$

P7. Encuentre el conjunto de los valores de $x_1, \ldots, x_6$ que resuelve:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & -2 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -3 & 5 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ 4 \\ -3 \\ 8 \end{bmatrix}$$

P8. Sean $u, v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Se define la matriz $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ por $A = uv^t$.

a) Pruebe que $\forall x \in \mathbb{R}^n\, Ax = 0 \Leftrightarrow v^t x = 0$.

b) Estudie si A es o no invertible.

P9. Considere las matrices cuadradas $A, B \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$. Demuestre que:

a) A es invertible $\Leftrightarrow AA^t$ es invertible.

b) Si $A = A^2$ y $B = I - A \Rightarrow B^3 = B$.

P10. *a*) Sea $K \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ tal que $K^t = -K$ y $I - K$ es invertible. Si $B = (I + K)(I - K)^{-1}$, demuestre que

$$B^t B = BB^t = I_n$$

b) Sea $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ tal que $A^3 = \mathbf{0}$. Considere el conjunto de matrices

$$G = \{M(\lambda) \in M_{n,n}(\mathbb{R}) : M(\lambda) = I + \lambda A + \frac{\lambda^2}{2} A, \lambda \in \mathbb{R}\}$$

(i) Pruebe que $M(\lambda_1 + \lambda_2) = M(\lambda_1) \cdot M(\lambda_2)$

(ii) Demuestre que $(G, \cdot)$ es un grupo abeliano, donde la operación $\cdot$ es la multiplicación de matrices. Identifique $(M(\lambda))^{-1}$