Auxiliar 1: Álgebra Lineal

Profesor Auxiliar: Orlando Rivera Letelier
Lunes 16 de Agosto de 2010

P1. Se dice que $P \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$ es una matriz de proyección si $P = P^2$.

- **(a)** Pruebe que si P es matriz de proyección, entonces $I_n - P$ es matriz de proyección, donde I_n es la matriz identidad en $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$.
- **(b)** Pruebe que P es matriz de proyección si y sólo si $P^2(I_n - P) = \mathbf{0}$ y $P(I_n - P)^2 = \mathbf{0}$.
- **(c)** Encuentre $P \in \mathcal{M}_{22}(\mathbb{K})$ tal que $P \neq P^2$ y $P^2(I_2 - P) = \mathbf{0}$.

P2. Sea $D = \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ diagonal, con $d_1, \ldots, d_n$ distintos y $A,\ B,\ M,\ S \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$.

- **(a)** Pruebe que si $MD = DM$ entonces M es diagonal.
- **(b)** Sea S invertible, tal que $S^{-1}AS$ y $S^{-1}BS$ son diagonales. Pruebe que $AB = BA$.
- **(c)** Sea S invertible, tal que $S^{-1}AS = D$. Suponiendo que $AB = BA$, verifique que $S^{-1}AS$ y $S^{-1}BS$ conmutan y concluya que $S^{-1}BS$ es diagonal.

P3. **(a)** Demuestre que si $A,\ B$ y $\left(A + B^{-1}\right)$ son matrices invertibles, entonces $\left(A^{-1} + B\right)$ también es invertible y su inversa es $A\left(A + B^{-1}\right)^{-1} B^{-1}$.

(b) Sea C la siguiente matriz de n filas y n columnas triangular superior a coeficientes reales:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 1 & 1 & 0 \\ \vdots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & 1 & 1 \\ \vdots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sea $N = C - I$, donde I es la matriz identidad de $n \times n$. Demuestre que $N^n = 0$.

(c) Demuestre que para las matrices C y N definidas en **(b)**, se tiene que C es invertible y su inversa es:

$$C^{-1} = I - N + N^2 - N^3 + \ldots + (-1)^{n-1} N^{n-1}.$$

P4. **(a)** Sea $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ una matriz cualquiera. Se define la *traza* de A, denotado por $\operatorname{tr}(A)$, como la suma de los elementos de la diagonal principal, es decir,

$$\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Por otra parte se define la función $f : \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, donde

$$f(A) = \operatorname{tr}(AA^t).$$

Pruebe que:

(1) Dadas $A,\ B \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$,

$$\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA).$$

(2) $f(A) \geq 0$, $\forall A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$, además muestre que

$$f(A) = 0 \Leftrightarrow A = \mathbf{0}.$$

Donde $\mathbf{0}$ es la matriz nula de $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$.

(3) $f(A) = \operatorname{tr}(A^t A)$.

(b) Sea $M \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$ una matriz tal que la matriz $M^t M \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ es invertible. Definamos la matriz $P \in \mathcal{M}_{mm}(\mathbb{R})$ como

$$P = I_m - M(M^t M)^{-1} M^t,$$

donde I_m es la matriz identidad de orden m.
Pruebe que:

(1) $P^2 = P$. Muestre además que $PM = \mathbf{0}$, donde $\mathbf{0} \in \mathcal{M}_{mm}(\mathbb{R})$ es la matriz nula.

(2) La matriz $M^t M$ es simétrica y muestre que la matriz P también es simétrica.

(3) Pruebe que P no es invertible.