Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática

Auxiliar Álgebra Lineal

Profesor: Alejandro Maass
Auxiliares: Andrés Fielbaum, César Vigouroux

Pregunta 1 Sea $E \subseteq \mathbb{R}^4$ el s.e.v. generado por los vectores

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

a) Encuentre una base de E y su dimensión

b) Encuente una base de $E^\perp$ y su dimensión

c) Para un vector $x \in \mathbb{R}^4$ cualquiera, encuentre $v \in E, w \in E^\perp$ tal que $x = v + w$ (i.e., explicite v, w en función de las coordenadas de x).

Pregunta 2 Sea $\mathcal{P}_k$ el espacio de polinomios a coeficientes reales de grado menor o igual a k.

a) Sea $L : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_4$, dada por $L(p)(x) = p(x)(x^2 + 1)$. Muestre que L está bien definida y que es lineal.

b) Encuentre una base y la dimensión de $Ker(L), Im(L)$.

c) Demuestre que $\mathcal{P}_1 \cap Im(L) = \{0\}$ y concluya que $\mathcal{P}_1 \oplus Im(L) = \mathcal{P}_4$.

Pregunta 3

a) Sean U, V s.e.v. de $\mathbb{R}^n$. Pruebe que $(U + V)^\perp = U^\perp \cap V^\perp$

b) Sean V, W e.v. reales, $T : V \to W$ una función lineal. Sea $\{u_1, ..., u_k\}$ un conjunto l.i. en V, y notemos $x_i = T(x_i) \forall i = 1, ...k$. Demuestre que:

$$x_1, ...x_k \text{ son l.i. } \Leftrightarrow \langle \{u_1, ..., u_k\} \rangle \cap Ker(T) = \{0\}$$