Auxiliar Álgebra Lineal

Profesor: Alejandro Maass
Auxiliares: Andrés Fielbaum, César Vigoroux

Pregunta 1 Considere $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^n$. Pruebe que

$$x_1, \dots, x_n \text{ es una familia l.i.} \iff A \text{ es invertible}$$

donde A es la matriz que tiene como columnas a $x_1, \dots, x_n$

Pregunta 2 Considere $M_{n,n}$ el espacio de las matrices de $n \times n$ a coeficientes reales. Defina:

$$E = \{A \in M_{n,n} \mid \exists b \in \mathbb{R} \text{ tq } \sum_{i=1}^n A_{ij} = b \forall j = 1, \dots, n\}$$

$$F = \{A \in M_{n,n} \mid \sum_{i=1}^n A_{ij} = 0 \forall j = 1, \dots, n\}$$

a) Pruebe que E es sev de $M_{n,n}$

b) Pruebe que F es sev de E

Pregunta 3 Sean E, F dos e.v., $T : E \rightarrow F$ una función *lineal*, i.e. que satisfice:

(I) $T(\lambda x) = \lambda T(x) \forall x \in E, \lambda$ escalar

(II) $T(x + y) = T(x) + T(y) \forall x, y \in E$

Considere $T(E)$ la imagen del espacio E .

a) Pruebe que $T(E)$ es un s.e.v. de F

Para las próximas partes suponga además que $T(x) = 0_F \Rightarrow x = 0_E$

b) Pruebe que T es inyectiva

c) Considere $\{u_1, \dots, u_n\}$ un conjunto l.i. en E . Pruebe que $\{T(u_1), \dots, T(u_n)\}$ es l.i. en F .

Pregunta 4

1. Sea $E = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R} : \exists N \in \mathbb{N} \text{ tq } x_n = 0 \forall n > N\}$ el conjunto de sucesiones reales con una cantidad finita de términos no nulos. Pruebe que es un s.e.v. del espacio de sucesiones reales

2. Sea $\mathcal{P}_k$ el espacio de polinomios menor igual que k . Defina $F = \{p(x) = a_0 + a_1x + a_3x^3 \in \mathcal{P}_3\}$ los polinomios de grado menor igual a 3 con coeficiente asociado a x^2 nulo. Pruebe que F es un s.e.v. de $\mathcal{P}_3$ y que $F = \langle \{1 + x, 2 + x, -x + 3x^3\} \rangle$