MA1101 Semestre Primavera 2010
Profesor: Alejandro Maass **Auxiliares:** Andrés Fielbaum - César Vigouroux

Solución P3, Auxiliar # 2

a) (i) Sea $x \in \mathbb{R}^n$. $Ax = \mathbf{0} \Leftrightarrow (uv^t)x = \mathbf{0} \Leftrightarrow u(v^t x) = \mathbf{0}$ $(*)$. Notando que $v^t x \in \mathbb{R}$ y que $u \neq \mathbf{0}$, entonces se concluye$^{(1)}$ de $(*)$ $v^t x = 0$.

(1): Si $\alpha \in \mathbb{R}$ es tal que $\alpha v = 0$, con $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$, entonces $\alpha v_i = 0$ $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$, y como $v \neq \mathbf{0}$, $\exists i^* \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $v_{i^*} \neq 0$, luego, como $\alpha v_{i^*} = 0$, necesariamente $\alpha = 0$.

(ii) De la parte anterior, $Ax = \mathbf{0} \Leftrightarrow v^t x = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n v_i x_i = 0$. Usando el mismo argumento de la parte anterior, como $v_{i^*} \neq 0$, podemos despejar $x_{i^*} = -\dfrac{\sum_{i=1, i\neq i^*}^n v_i x_i}{v_{i^*}}$, quedando al lado derecho $n-1$ variables libres para el sistema original $Ax = \mathbf{0}$. Dado que habrán infinitas soluciones, aparte de la trivial $x = \mathbf{0}$, se concluye que la matriz A no es invertible.

b) (i) $\lfloor \Rightarrow \rceil$: Dado que A es invertible, su traspuesta A^t también lo es, luego, por multiplicación de matrices invertibles, AA^t es invertible.
$\lceil \Leftarrow \rfloor$: Como AA^t es invertible, $\exists B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tal que $B(AA^t) = (AA^t)B = I_n$. Asociando paréntesis, se tiene $A(A^t B) = I_n$. Luego, A es invertible y su inversa es $A^t B$.

(ii) $B^3 = BB^2 = B(I-A)(I-A) = B(I^2 - IA - AI + A^2) =^{(2)} B(I - A - A + A)$
$= B(I-A) = (I-A)(I-A) =^{(3)} I - A = B$
(2): Usando que $A^2 = A$ (hipótesis de enunciado).
(3): Cálculo hecho 3 pasos antes.