Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática

Pauta Auxiliar Álgebra Lineal

Profesor: Alejandro Maass
Auxiliares: Andrés Fielbaum, César Vigoroux

Pregunta 2

(iv) No es difícil darse cuenta que por ser el plano paralelo a ambas rectas, entonces la distancia entre ambos conjunto será simplemente la distancia de cualquier punto de la recta a tal conjunto, y esta distancia será el largo del segmento que une al punto con su proyección ortogonal.
Luego lo que haremos seá considerar los planos Π_1, Π_2 que sean paralelos a Π y contengan a L_1, L_2 respectivamente. De (i) sabemos que $\Pi_1 = \Pi$, luego bastará tomar cualquier punto de Π_2, proyectarlo sobre Π, calcular la distancia de ese segmento, y el punto medio del segmento será el vector posición del plano buscado. Sus vectores directores serán los mismos que de Π.
En la parte (iii) precisamente se calcula la proyección ortogonal de P sobre Π. Como no alcanzamos a hacerlo en clase, repasemos la idea. Queremos un punto que pertenezca a la recta $P + un$, donde $n = (3, -2, -1)^T$ es el vector normal a Π encontrado en (ii). El punto que buscamos además debe pertenecer a Π, i.e. debe satisfacer para ciertos s, t la ecuación $(-1, 2, 1)^T + t(1, 2, -1)^T + s(0, 1, -2)^T$. Como ambas ecuaciones deben satisfacerse para ciertos u, s, t, obtenemos, igualando coordenada a coordenada, el sistema de ecuaciones:

$$-1 + t = 3 + 3u$$

$$2 + 2t + s = 1 - 2u$$

$$1 - t - 2s = -1 - u$$

El sistema de ecuaciones se resuelva (ya sea inviertiendo la matriz que lo define o reemplazando en forma iterativa los valores), y se encuentra que $u = -8/7, t = 4/7, s = 1/7$, luego la proyección ortogonal buscada (a la que llamaremos Q) es $P - 8/7n = \frac{1}{7}(-3, 23, 1)^T$. El largo de la proyección ortogonal será entonces el largo del segmento que une a P y Q, i.e., $||P - Q|| = ||P - (P + un)|| = ||un|| = \frac{8}{7}||n|| = \frac{8}{7}\sqrt{3^2 + (-2)^2 + (-1)^2} = \frac{8}{7}\sqrt{14}$, luego el punto medio del segmento es $P + \frac{-4}{7}n = \frac{1}{7}(9, 15, -3)^T$ (pues ese tiene distancia $\frac{4}{7}\sqrt{14}$ de P), y así el plano buscado es:

$$\frac{1}{7} = (9, 15, -3)^T + t(1, 2, -1)^T + (0, 1, -2)^T$$

Pregunta 3

1. Dado que tenemos las ecuaciones cartesianas de los planos, y queremos la intersección, i.e., aquellos puntos que están en ambos planos, tenemos que la recta está simplemente definida por las dos ecuaciones, es decir la ecuación cartesiana de la recta es:

$$x + y + 2z = 1$$

$$-x + y = 2$$

El vector posición sera cualquiera de la recta, como tenemos solamente un grado de libertad, fijamos valores para x y encontramos y, z. Por ejemplo, fijamos $x = 0$ lo que nos da $y = 2, z = -3/2$, y entonces el vector posición será $P_1 = (0, 2, -3/2)^T$. Para el vector director buscamos otro punto en la recta, fijamos ahora $y = 0 \Rightarrow x = -2, z = 3/2$, con lo que el punto $P_2 = (-2, 0, 3/2)$ también está en la recta y el vector director será entonces $e = P_2 - P_1 = (-2, -2, 3)$.

2. No podemos llegar y combinar las ecuaciones, porque una está en tipo paramétrica y la otra en tipo cartesiana. Buscamos la ecuación cartesiana del plano, para ello necesitamos 3 puntos, cada punto lo encontramos fijando 2 valores (pues tenemos 2 grados de libertad). Luego, $x = y = 0 \Rightarrow z = 1/2, x = z = 0 \Rightarrow y = 1, y = z = 0 \Rightarrow x = 1$, luego el vector posición será cualquiera de ellos (usaremos $(1, 0, 0)^T$ y los vectores directores salen de restar, luego serán $(1, 0, 0)^T - (0, 1, 0)^T = (1, -1, 0)^T$ y $(0, 0, 1/2)^T - (1, 0, 0)^T = (-1, 0, 1/2)^T$. Con ello la ecuación vectorial del plano es $(1, 0, 0)^T + s(1, -1, 0)^T + t(-1, 0, 1/2)^T$. Por otro lado, la ecuación paramétrica de L_1 es $(0, 1, 1)^T + u(1, 0, 0)^T$.
Igualando coordenada a coordenada llegamos al sistema:
$$1 + s - t = u$$
$$-s = 1$$
$$t/2 = 1$$
Que se resuelve obteniéndose $s = -1, t = 2, u = -2$. El punto buscado es entonces $P_2 = (0, 1, 1)^T - 2(1, 0, 0)^T = (-2, 1, 1)^T$.

3. Para L_2 ya tenemos sus 2 ecuaciones cartesianas. Buscamos ahora la del plano en cuestión, sabemos que su ecuación normal es $< (x, y, z)^T - P_2, e >= 0 \Leftrightarrow < (x, y, z)^T - (-2, 1, 1)^T, (-2, -2, 3)^T >= 0 \Leftrightarrow -2(x + 2) - 2(y - 1) + 3(z - 1) = 0 \Leftrightarrow -2x - 2y + 3z = 5$. Con ello obtenemos el sistema de ecuaciones
$$x + y + 2z = 1$$
$$-x + y = 2$$
$$-2x - 2y + 3z = 5$$
Que tiene como solución al punto $P_3 = (-3/2, 1/2, 1)^T$

4. Contenida en $\Pi_2 \Rightarrow -x + y = 2$. Ortogonal a L_2 y pasa por $P_3 \Rightarrow < (x, y, z)^T - (-3/2, 1/2, 1)^T, (-2, -2, 3)^T >= 0 \Rightarrow -2(x + 3/2) - 2(y - 1/2) + 3(z - 1) = 0 \Rightarrow -2x - 2y + 3z = -5$. Con ello tenemos ya las dos ecuaciones cartesianas, buscamos ahora dos puntos de la recta, sabemos que uno será P_3 y el otro, tomando $x = 0$ y reemplazando en las ecuaciones entrega $(0, 2, -1/3)$, por lo que el vector posición sera P_3 y el vector director $f = P_3 - (0, 2, -1/3)^T = (-3/2, -1/2, 4/3)$, y así la ecuación vectorial pedida es: $(-3/2, 1/2, 2)^T + t(-3/2, -1/2, 4/3)^T$.