Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática

Auxiliar Álgebra Lineal

Profesor: Alejandro Maass
Auxiliares: Andrés Fielbaum, César Vigoroux

Pregunta 1

1. Sea $B \in \mathcal{M}_{m\times n}, x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m$. Pruebe que $< Bx, y >=< x, B^T y >$
2. Sea $A = I_n + B^T B$. Pruebe que $< Ax, x >= ||x||^2 + ||Bx||^2$
3. Concluya que A es invertible

Pregunta 2

1. Sean $A, B \in \mathcal{M}_{n\times m}$. Pruebe que:

$$A = B \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^m, \forall y \in \mathbb{R}^n, < Ax, y >=< Bx, y >$$

Hint: Calcule $< Ae_i, e_j >$, donde e_i es un vector que tiene sólo ceros salvo un uno en la posición i.

2. Suponga ahora que $n = m$ y que A, B son además simétricas. Pruebe que

$$A = B \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^m < Ax, x >=< Bx, x >$$

Pregunta 3

Sea $M \in \mathcal{M}_{m\times n}$ que verifica $M^T M$ es invertible. Sea $P = I_m - M(M^T M)^{-1} M^T$.

1. Pruebe que $P^2 = P$ y que $PM = \mathbf{0}$, donde $\mathbf{0}$ es la matriz nula.
2. Pruebe que $M^T M$ es simétrica y que P también lo es.
3. Pruebe que P no es invertible.