

MA1102 - Algebra Lineal.**Profesor:** Jorge Amaya. **Auxiliares:** Franco Basso, Mauricio Fuentes.

Auxiliar 3

30 de Agosto de 2010

P1. Considere el siguiente sistema lineal:

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & = & \beta \\ -x_1 & + & x_2 & & & & + & x_4 & = & \beta^2 \\ & & 3x_2 & + & 3x_3 & + & \alpha x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & (\alpha + 3)x_3 & - & 2x_4 & = & -2 \end{array}$$

Determine los valores o condiciones para los parámetros α y β de modo que el sistema:

1. Tenga infinitas soluciones
2. No tenga solución
3. Tenga solución única

P2. (i) Sean A, B matrices de $n \times m$ con coeficientes reales. Pruebe que:

$$A = B \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^m \forall y \in \mathbb{R}^n \quad (Ax)^t y = (Bx)^t y$$

(ii) Sean A, B matrices de $n \times n$ simétricas con coeficientes reales. Pruebe que:

$$A = B \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^n \quad (Ax)^t x = (Bx)^t x$$

P3. La matriz $U \in M_{nn}(\mathbb{R})$ se dice unitaria si $U^t U = I$

- (i) Sean $U, U_1, U_2 \in M_{nn}(\mathbb{R})$ matrices unitarias. Pruebe que U es invertible y que su inversa es unitaria. Además, pruebe que $U_1 U_2$ es unitaria.
- (ii) Sea $u \in \mathbb{R}^n$ tal que $u^t u = 1$. Pruebe que $H = I - 2uu^t$ es unitaria.
- (iii) Sea $\theta \in \mathbb{R}$ y $G(\theta) \in M_{22}(\mathbb{R})$ definida como sigue:

$$G(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Pruebe que $G(\theta)$ es unitaria.

- (iv) Sea $U \in M_{nn}(\mathbb{R})$ triangular superior y unitaria. Pruebe que U es diagonal y determine los valores en $\mathbb{R}$ que pueden tomar los elementos de la diagonal de U .