MA1102 - Algebra Lineal.**Profesor:** Jorge Amaya. **Auxiliares:** Franco Basso, Mauricio Fuentes.

Auxiliar 1

16 de Agosto de 2010

P1. Sea $M \in M_{mn}(\mathbb{R})$ una matriz tal que la matriz $(M^t M) \in M_{nn}(\mathbb{R})$ es invertible. Definamos la matriz $P \in M_{mm}(\mathbb{R})$ como

$$P = I - M(M^t M)^{-1}M^t$$

Verifique que:

1. $P^2 = P$. Muestre además que $PM = 0$, donde $0 \in M_{mn}(\mathbb{R})$ es la matriz nula.
2. La matriz $(M^t M)$ es simétrica y muestre que la matriz P también es simétrica.

P2. Sea $A = (a_{ij}) \in M_{nn}(\mathbb{R})$ matriz cualquiera. Se define la traza de A , denotada por $tr(A)$, como la suma de los elementos de la diagonal, es decir:

$$tr(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}.$$

Por otra parte, se define la función $f : M_{nn}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, donde

$$f(A) = tr(AA^t)$$

Pruebe que:

- (i) Dadas $A, B \in M_{nn}(\mathbb{R})$, $tr(AB) = tr(BA)$.
- (ii) $f(A) \geq 0$, $\forall A \in M_{nn}(\mathbb{R})$, además muestre que

$$f(A) = 0 \Leftrightarrow A = 0$$

- (iii) $f(A) = tr(A^t A)$

P3. Sea $D = diag(d_1, \dots, d_n) \in M_{nn}(\mathbb{R})$ matriz diagonal, con $d_1, \dots, d_n$ distintos y $A, B, M, S \in M_{nn}(\mathbb{R})$.

- (i) Pruebe que si $MD = DM$ entonces M es diagonal.
- (ii) Sea S invertible, tal que $S^{-1}AS$ y $S^{-1}BS$ son diagonales. Pruebe que $AB = BA$
- (iii) Sea S invertible tal que $S^{-1}AS = D$. Suponiendo que $AB = BA$, verifique que $S^{-1}AS$ y $S^{-1}BS$ conmutan y concluya que $S^{-1}BS$ es diagonal.