MA1102-3- Algebra Lineal.
Profesor: Felpe Célèry C.
Auxiliares: Sebastián Barbieri, Pedro Montealegre B.

Auxiliar 1

16 de Agosto de 2010

P1. Sea $J \in M_{nn}(\mathbb{R})$ tal que $J = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$ y $e = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$

1. Pruebe que $Je = ne$ y $J^2 = nJ$.
2. Sea $\alpha \neq \frac{1}{n}$. Calcule β tal que $(I - \alpha J)^{-1} = I + \beta J$
3. Sea $\alpha = \frac{1}{n}$. Pruebe que $(I - \alpha J)e = 0$

P2.
1. Verifique que si una matriz cuadrada A verfica $A^k = I$ para algún natrual $k \geq 1$, entonces A es invertible y determine su inversa.
2. Encuentre todas las matrices de la forma $A = \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & z \end{bmatrix}$ que cumplen $A^2 = I$ (x, y, $z \in \mathbb{R}$)

P3.
1. Dadas la matriz
$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$
encuentre A^n en función de n.
2. Si A es una matriz triangular superior en $M_{3,3}(\mathbb{R})$ tal que $a_{ii} = 1$ para $i = 1, 2, 3$ y $N = A - I$, verifique que $N^3 = 0$ y $A^{-1} = I - N + N^2$

P4. Sean $A \in M_{mn}(\mathbb{R})$ y $B \in M_{mn}(\mathbb{R})$. Muestre que si las inversas existen, entonces
$$(I + AB)^{-1} = I - A(I + BA)^{-1}B$$

P5. Una matriz cuadrada M se dice nilpotente si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $M^n = 0$. Muestre que si A y B son matrices nilpotentes tales que $AB = BA$ entonces $A + B$ y AB son nilpotentes. De un ejemplo para mostrar que la hipótesis $AB = BA$ es necesaria.

P6. Sea T una matriz triangular tal que $T^tT = TT^t$. Pruebe que T es diagonal.