MA1102-3- Álgebra Lineal.
Profesor: Felpe Célèry C.
Auxiliares: Sebastián Barbieri, Pedro Montealegre B.

Auxiliar 9

27 de Octubre de 2010

P1. Sea $A \in M_{nn}(\mathbb{R})$ una matriz invertible y U un s.e.v. de $\mathbb{R}^n$ de dimensión k, con 0 <k <n.
Definimos: $W = \{y \in \mathbb{R}^n | \forall u \in U : \langle Au, Ay\rangle = 0\}$

1. Mostrar que W es un s.e.v. de $\mathbb{R}^n$ y probar que $W \cap U = \{0\}$
2. Sea $V = \{v \in \mathbb{R}^n | \exists u \in U : v = Au\}$. Purbe que V es s.e.v. de $\mathbb{R}^n$
3. Sea $\{v_1, ...v_k\}$ una base ortonormal de V ($\langle v_i, v_j\rangle$ vale 1 si i = j, o 0 de lo contrario). Probar que $\{u_1, ...u_k\}$ donde $u_i = A^{-1}v_i$ es una base de U que verifica que $\langle Au_i, Au_j\rangle$ = 0 si $i \neq j$ y $\langle Au_i, Au_j\rangle$ = 1 si $i = j$.
4. Considerando la base $\{u_1, ...u_k\}$ del punto anterior, pruebe que $w \in W \Leftrightarrow \forall i \in \{1, ..., k\}$, $\langle Aw, Au_i\rangle$ = 0.
5. Probar que si $v \in \mathbb{R}^n$ entonces $z = \sum_{i=1}^{k} \langle Av, Au_i\rangle\, u_i \in U$ y que $v - z \in W$.
6. Deducir que $\mathbb{R}^n$ = $U \oplus W$ y calcular la dimensión de W.

P2. Consideremos el espacio $M_{nn}(\mathbb{R})$ de las matrices cuadradas de orden n. Consideremos la función T: $M_{nn}(\mathbb{R}) \longrightarrow M_{nn}(\mathbb{R})$ tal que $T(A)$ = $A^t - A$.

1. Probar que T es lineal
2. Supongamos que ahora trabajamos en $M_{22}(\mathbb{R})$, es decir, las matrices cuadradas de orden 2. Encontrar explícitamente la función T usando la base canónica de $M_{22}(\mathbb{R})$.
3. En el último caso, calcular $Ker(T)$ e $Im(T)$ y sus respectivas dimensiones.
4. Volviendo al caso de las matrices de orden n, calcular las dimensiones de $Ker(T)$ e $Im(T)$.

P3. Considere la sucesión de fibonacci f_n = $f_{n-1} + f_{n-2}$ con $f_0 = 0$ y $f_1 = 1$.

1. Muestre que $\begin{bmatrix} f_n \\ f_{n-1} \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{n-1} \\ f_{n-2} \end{bmatrix}$ y pruebe que $\begin{bmatrix} f_n \\ f_{n-1} \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{n-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Esto reducirá el cálculo de los valores de esta secuencia, a conocer las potencias de la matriz anterior.
2. Calcule los valores propios y vectores propios de $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
3. Escriba la matriz anterior, como una diagonal con los valores propios, multiplicada por la matriz con los vectores propios, y su inversa, de la forma PDP^{-1}.
4. deduzca una fórmula explícita para el n-ésimo número de fibonacci.

P4.

1. Pruebe que si una matriz cuadrada A es nilpotente ($\exists\ k \in \mathbb{N}$ tal que $A^k = 0$), entonces todos sus valores propios son nulos.
2. Pruebe que si una matriz cuadrada A es idempotente ($A = A^2$), entonces todos sus valores propios son 0 o 1.

P5. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre $\mathbb{R}$, sea $T : V \longrightarrow V$ una transformación lineal tal que $T \circ T = T$. Demuestre que $V = Ker(T) \oplus Im(T)$.

P6. Sean U, V espacios vectoriales con cuerpo $\mathbb{R}$, sea $T : U \longrightarrow V$ una transformación lineal y sea $\{u_1, ..., u_n\}$ un conjunto l.i.

Demuestre que $\{T(u_1), ..., T(u_n)\}$ son l.i. $\Leftrightarrow \langle\{u_1, ..., u_n\}\rangle \cap Ker(T) = \{0\}$

P7. Sea A matriz cuadrada de orden n. Probar que si $r(A) < n$, entonces $|A| = 0$.

P8. Encuentre la forma normal de Hermitte de:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Recuerde que la forma normal de hermitte es llevar la matriz a la forma $\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ por medio de matrices invertibles.