MA1102-3- Álgebra Lineal.
Profesor: Felpe Célèry C.
Auxiliares: Sebastián Barbieri, Pedro Montealegre B.

Auxiliar 7

18 de Octubre de 2010

P1. Considere el espacio l^2 de las sucesiones a valores reales cuadrado integrables, es decir:

$$(a_n)_{n\in N} \in l^2 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 < \infty$$

1. Muestre que l^2 es un espacio vectorial.
2. Sea e_i la sucesión canónica tal que $e_i(k) = \begin{cases} 1 & i = k \\ 0 & i \neq k \end{cases}$. Muestre que la colección finita $A_n = \{e_i : i = 1...n\}$ es un conjunto l.i.
3. Concluya que el espacio l^2 no puede ser de dimensión finita.

P2.
1. Sea $T : U \longrightarrow V$ tal que T es inyectiva, muestre que si $\{u_1, u_2, ...u_n\}$ es una base de U, entonces $\{T(u_1), T(u_2), ...T(u_n)\}$ es una base de $Im(T)$
2. Sea U un e.v. y $T : U \longrightarrow U$ una transformación lineal. Demuestre que $T \circ T = 0. \Leftrightarrow Im(T) \subseteq Ker(T)$.
3. Encuentre todas las transformaciones lineales $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tales que $Ker(T) = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle$ y $Ker(T) = Im(T)$
4. Sea $T : M_{33}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ la función que a cada matriz $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ le asigna $T(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33}$. Pruebe que T es lineal, encuentre $Ker(T)$ e $Im(T)$ y sus respectivas dimensiones. ¿Es T inyectiva?, ¿es sobreyectiva?

P3. Sea $M_{22}(\mathbb{R})$ y considere los siguientes subconjuntos:
$W_1 = \{A \in M_{22}(\mathbb{R}) : a_{11} + a_{12} + a_{21} + a_{22} = 0\}$ y $W_2 = \{A \in M_{22}(\mathbb{R}) : a_{11} + a_{22} = 0\}$

1. Muestre que son s.e.v de $M_{22}(\mathbb{R})$
2. Encuentre una base y la dimensión de W_1 y W_2
3. Encuentre una base y la dimensión de $W_1 \cap W_2$
4. ¿Cuál es la dimensión de $W_1 + W_2$?

P4. Demuestre que una matriz es invertible, si y solamente si sus columnas son linealmente independientes.

P5. sea $m = 2n$ con $n > 0$ y considere el conjunto $\mathcal{P}_m(\mathbb{R})$ de polinomios de grado menor o igual a m a coeficientes reales. Se define $V = \{p(x) \in \mathcal{P}_m(\mathbb{R}) : \forall i \in \{0, ..., m\}, a_i = a_{m-i}\}$

1. Probar que V es un s.e.v de $\mathcal{P}_m(X)$
2. Encuentre una base de V y deduzca su dimensión.
3. Probar que $\mathcal{P}_m(\mathbb{R}) = V \oplus \mathcal{P}_{n-1}(\mathbb{R})$
4. Consideremos ahora $V' = \{p(x) \in \mathcal{P}_m(\mathbb{R}) : \forall i \in \{0, ..., m\}, a_i = -a_{m-i}\}$. Asumiendo que es s.e.v de $\mathcal{P}_m(\mathbb{R})$ pruebe que $\mathcal{P}_m(\mathbb{R}) = V \oplus V'$.

P6. sea T:$(\mathbb{R}^3) \longrightarrow \mathbb{R}^2$ lineal tal que: $Ker(T) = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} \right\rangle$ y $T(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

1. calcule dim($Ker(T)$ y una base de este.
2. Encuentre explícitamente $T(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix})$
3. Encuentre una base de $Im(T)$
4. ¿Es T inyectiva? es ¿epiyectiva?