MA1102-3- Álgebra Lineal.
Profesor: Felpe Célèry C.
Auxiliares: Sebastián Barbieri, Pedro Montealegre B.

Auxiliar 5

29 de Septiembre de 2010

P1. Sean Π_1 el plano de ecuación: $x + y + 2z = 1$ y Π_2 el plano de ecuación: $-x + y = 2$. Sea además la recta que pasa por el punto $P_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ con vector director $D_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

a. Encuentre la ecuación de la recta L_2, que se obtiene como la intersección de los planos Π_1 y Π_2. Entregue un vector director de dicha recta.
b. Encuentre el punto P_2 de intersección de la recta L_1 con el plano Π_1.
c. Calcular el punto P_3 de intersección de L_2 con el plano perpendicular a L_2 que pasa por el punto P_2.
d. Encuentre la ecuación paramétrica o vectorial de la recta contenida en π_2 que pasa por el punto P_3 y es perpendicular a L_2.

P2.

1. Verifique que las rectas L_1: $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix}$ y L_2: $\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix}$ se intersectan en un único punto, encúentrelo.
2. Sea Π el plano con vectores directores $d_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ y $d_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$ que pasa por $P = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Y considere la recta L que pasa por $P' = \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ y tiene vector director $d' = \begin{bmatrix} 1 \\ b \\ 0 \end{bmatrix}$. Con a y b en $\mathbb{R}$. Encuentre los valores de a y b tales que:
   a) $L \subseteq \Pi$
   b) $L \cap \pi = \phi$
   c) $L \cap \pi$ contenga exactamente un solo punto.

P3. Sea α y $\beta \in \mathbb{R}$ y considere el siguiente sistema lineal de ecuaciones en las variables x_1, x_2 , x_3 y x_4 con α y β en $\mathbb{R}$.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + (3 - \alpha)x_4 = \alpha \\ x_1 + x_2 + (\alpha + \beta + 3)x_4 = \beta \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2\alpha + 2\beta \end{cases}$$

a. Determine los valores de α y β para que (i) el sistema no tenga solución, (ii) el sistema tenga infinitas soluciones y (iii) el sistema tenga una única solución.

b. Sea $\alpha = -2$ y $\beta = 2$. Encuentre el conjunto solución.

P4. Sea $\mathcal{M}_{nn}$ el conjunto de todas las matrices cuadradas de orden n, se define la traza de una matriz cuadrada de orden n como $Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} A_{i,i}$ es decir, la suma de la diagonal. Probar las siguientes propiedades:

1. $Tr(A + B) = Tr(A) + Tr(B)$
2. $Tr(\lambda A) = \lambda Tr(A)$
3. $Tr(AB) = Tr(BA)$
4. Sea P invertible probar que: $Tr(A) = Tr(PAP^{-1})$
5. Probar que $Tr(AA^T) \geq 0$. Y que $Tr(AA^T) = 0 \Leftrightarrow A = 0$.

P5. La matriz U en $\mathcal{M}_{nn}$ se dice unitaria si $UU^T = I_n$.

1. Sean U y V matrices en $\mathcal{M}_{nn}$ unitarias, muestre que son invertibles, y pruebe que UV es unitaria.
2. Sea u en $\mathbb{R}^n$ tal que $u^T u = 1$. Pruebe que $H = I_n - 2uu^T$ es unitaria.
3. Sea θ en $\mathbb{R}$ y $G(\theta) = \begin{bmatrix} cos(\theta) & -sin(\theta) \\ sin(\theta) & cos(\theta) \end{bmatrix}$. Pruebe que $G(\theta)$ es unitaria, y que para cualquier A en $\mathcal{M}_{22}$ existe θ tal que $A_{2,1} = 0$.
4. Sea U triangular superior y unitaria. Pruebe que U es diagonal, y determine que coeficientes puede tomar su diagonal.