Clase Auxiliar N°14: Álgebra Lineal

Profesor: Jaime San Martín
Auxiliares: Gonzalo Contador - Gonzalo Mena

17 de noviembre de 2010

P1. Sea $A \in M_{nxn}(\mathbb{R})$ una matriz simétrica cuyos valores propios son $\lambda_1 = \ldots = \lambda_k = 1$ y $\lambda_{k+1} = \ldots = \lambda_n = 0$ con $0 < k < n$, y su descomposición es $A = PDP^{-1}$ donde las columnas de P son un conjunto ortonormal, y D la matriz diagonal de valores propios.

a) Demuestre que $P \in M_{nxn}(\mathbb{R})$ es una matriz ortogonal o unitaria, es decir ($P^tP = I$) (de ahí, $A = PDP^t$)

b) Sea $z = P^tx$ y $x \in \mathbb{R}^n$, probar que $||Ax||^2 = ||Dz||^2$ y que $||x||^2 = ||z||^2$. Concluir que para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $||Ax||^2 \leq ||x||^2$.

c) Probar que existe $x_0 \in \mathbb{R}^n$ $\{0\}$ tal que $||Ax_0||^2 = ||x_0||^2$.

P2. Para U s.e.v. de $\mathbb{R}^n$ definimos $U^\perp = \{x \in \mathbb{R}^n \langle x, u\rangle = 0,\ \forall u \in U\}$. Para U, V s.e.v. de $\mathbb{R}^n$ demuestre que

a) $U \oplus U^\perp = \mathbb{R}^n$

b) $(U + V)^\perp = U^\perp \cap V^\perp$.

c) $(U^\perp)^\perp = U$.

d) $(U \cap V)^\perp = U^\perp + V^\perp$.

e) $U \oplus V = \mathbb{R}^n \Leftrightarrow U^\perp \oplus V^\perp = \mathbb{R}^n$.

Nota: Puede utilizar el siguiente hecho. Para U s.e.v. de $\mathbb{R}^n$ y $x \in \mathbb{R}^n$ podemos considerar $P_U(x) \in U$ la proyección de x sobre U, que verifica $\langle x - P_U(x), u\rangle = 0\ \forall u \in U$

P3. (a) Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Encuentre su diagonalización de la forma $A = PDP^t$

(b) Sea $M \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ simétrica y $\{z_1, \ldots, z_n\}$ una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ de vectores propios de M, asociados a los valores propios $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ respectivamente. Pruebe que $\{z_1, \ldots, z_n\}$ es también una base ortogonal de vectores propios de la matriz

$$C = M + z_1 z_1^t$$

Determine ademas los valores propios asociados.