Clase Auxiliar N°10: Álgebra Lineal

Profesor: Jaime San Martín
Auxiliares: Gonzalo Contador - Gonzalo Mena

25 de octubre de 2010

P1. Determinar una base del subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

dar su dimensión y extenderla a una base de $\mathbb{R}^4$

P2. *a*) Sean V, W espacios vectoriales reales y $T : V \to W$ una función lineal. Sea $\{u_1, \ldots, u_k\} \subset V$ un conjunto linealmente independiente. Pruebe que los vectores $T(u_1), \ldots, T(u_k)$ son l.i. si y sólo si $\langle\{u_1, \ldots, u_k\}\rangle \cap ker(T) = \{0\}$

b) Considere los siguientes subconjuntos de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$:
$W_1 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \ / \ f \text{ es par}\} = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \ / \ f(x) = f(-x) \ \forall x \in \mathbb{R}\}$.
$W_2 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \ / \ f \text{ es impar}\} = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \ / \ f(x) = -f(-x) \ \forall x \in \mathbb{R}\}$.

(i)Demuestre que W_1 y W_2 son subespacios vectoriales de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
(ii)Demuestre que $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = W_1 \oplus W_2$.

P3. Sea $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ el conjunto de los polinomios de grado menor o igual a 3 con coeficientes reales. Se define la transformación $T : \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ por:

$$T(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) = a_0 + (2a_1 + a_2)x + (2a_2 + a_3)x^2 + 2a_3x^3$$

a) Probar que T es una transformación lineal.

b) Probar que T es una transformacion biyectiva.

c) Si id es la transformación identidad del espacio vectorial $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ pruebe que $T - 2id$, $(T - 2id)^2$, $(T - 2id)^3$ y $T - id$ son tranformaciones lineales.

d) Encontrar bases y dimensión de $Ker(T - 2id)$, $Ker(T - 2id)^2$ y $Ker(T - 2id)^3$.

e) Probar que $\mathcal{P}_3(\mathbb{R}) = Ker(T - 2id)^2 \oplus Ker(T - id)$.