Clase Auxiliar N°9: Álgebra Lineal

Profesor: Jaime San Martín
Auxiliares: Gonzalo Contador - Gonzalo Mena

13 de octubre de 2010

P1. Denotemos por $\mathcal{P}_k$ el espacio vectorial de los polinomios con coeficientes reales de grado menor o igual que k .

- Sea $L : \mathcal{P}_2 \rightarrow \mathcal{P}_4$ definida por $L(p(x)) = p(x)(x^2 + 1)$. Muestre que L es lineal.
- Encuentre una base y dimensión de $\ker(L)$ e $\text{Im}(L)$. En adelante $V = \text{Im}(L)$
- Pruebe que $\mathcal{P}_1 \cap V = \{0\}$
- Calcule $\dim(\mathcal{P}_1 \oplus V)$ y deduzca que $\mathcal{P}_1 \oplus V = \mathcal{P}_4$

P2. Considere la transformación lineal $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ que satisface:

$$T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, T \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a) Sean $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}$. Encuentre, en términos de a_1, a_2, a_3, a_4 , los valores $b_1, b_2, b_3, b_4 \in \mathbb{R}$

que satisfacen $T \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}$

- Encuentre una base del $\text{Ker}(T)$
- Encuentre una base de $\text{Im}(T)$

P3. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre $\mathbb{R}$ y sea $T : V \rightarrow V$ una transformación lineal tal que $T \circ T = T$. Pruebe que $V = \text{Ker}(T) \oplus \text{Im}(T)$.

P4. Sea U un espacio vectorial de dimensión n y sea $V \subset U$ un subespacio de U . Sea T una transformación lineal en U tal que

- $\text{Im}(T) = V$
- $T \circ T = T$
- $\forall x, y \in U \langle T(x), y \rangle = \langle x, T(y) \rangle$ ¹

Pruebe que $\forall x \in U$ $T(x)$ es la proyección ortogonal de x sobre V .

P5. Sean V, W espacios vectoriales reales y $T : V \rightarrow W$ una función lineal.

Sea $\{u_1, \dots, u_k\} \subset V$ un conjunto linealmente independiente. Pruebe que los vectores $T(u_1), \dots, T(u_k)$ son l.i. si y sólo si $\langle \{u_1, \dots, u_k\} \cap \ker(T) = \{0\}$

¹Por simplicidad puede suponer que $U = \mathbb{R}^n$