Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Universidad de Chile

Clase Auxiliar N°7: Álgebra Lineal

Profesor: Jaime San Martín
Auxiliares: Gonzalo Contador - Gonzalo Mena

29 de septiembre de 2010

P1. *a*) Sean p, q, r tres puntos en $\mathbb{R}^3$ no colineales. Sea π el plano que contiene a dichos puntos. Demuestre que

$$x \in \pi \Leftrightarrow \exists \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \text{ tales que } \alpha + \beta + \gamma = 1, x = \alpha p + \beta q + \gamma r$$

b) Sean las rectas

$$L_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \tag{1}$$

$$L_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \tag{2}$$

Pruebe que el plano que contiene a L_1, L_2 tiene ecuación cartesiana dada por $x + y - z = 1$

P2. Sea $\mathcal{P}_4$ el conjunto de los polinomios a coeficientes reales de grado menor o igual a 4. Definimos

$$V_1 = \{p \in \mathcal{P}_4 | \; p(1) + 2p(-1) = 0\} \tag{3}$$

$$V_2 = \{p \in \mathcal{P}_4 | \; p(x) = a + bx + cx^2 + bx^3 + ax^4 \quad a, b, c \in \mathbb{R}\} \tag{4}$$

a) Pruebe que V_1, V_2 son s.e.v. de $\mathcal{P}_4$

b) Muestre que $V_1 = \langle \{1 + x^4, x + x^3, x^2\} \rangle$

P3. Sea $M_{n,n}$ el espacio de las matrices a coeficientes reales. Consideramos los conjuntos

$$E = \{A = (a_{i,j})_{i,j} \in M_{n,n} | \text{existe } c \in \mathbb{R} \text{ tal que } \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = c \text{ para todo } 1 \leq n\} \tag{5}$$

$$E_0 = \{A = (a_{i,j})_{i,j} \in M_{n,n} | \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 0 \text{ para todo } 1 \leq n\} \tag{6}$$

a) Demuestre que E es s.e.v. de $M_{n,n}$

b) Demuestre que E_0 es s.e.v de E

c) Encuentre $\{A_1, \ldots A_{n(n-1)}\} \subseteq E_0$ que sean l.i y tales que $\langle \{A_1, \ldots A_{n(n-1)}\} \rangle = E_0$

P4. Sea $A \in M_{n,n}$ una matriz invertible y U un s.e.v. estricto de $\mathbb{R}^n$. Se define

$$W = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \forall u \in U, \langle Au, Ay \rangle = 0\}$$

a) Probar que W es s.e.v. de $\mathbb{R}^n$ y que $W \cap U = \{0\}$

b) Sea $V = \{v \in \mathbb{R} \mid \exists u \in U, v = Au\}$. Pruebe que V es s.e.v. de $\mathbb{R}^n$

c) Probar que si $\{v_1 \ldots v_k\} \subseteq V$ es un conjunto l.i tal que $\langle \{v_1 \ldots v_k\} \rangle = V$ y $\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{i,j}$ entonces $\{u_1 \ldots u_k\}$ definido por $u_i = A^{-1} v_i$ es l.i, $\langle \{u_1 \ldots u_k\} \rangle = U$ y además $\langle Au_i, Au_j \rangle = \delta_{i,j}$

d) Probar que

$$w \in W \Leftrightarrow \forall i \in \{1, \ldots, k\}, \langle Aw, Au_i \rangle = 0$$

e) Probar que si $v \in \mathbb{R}^n$ entonces $z = \sum_{i=1}^{k} < Av, Au_i > u_i \in U$ y que $v - z \in W$