Clase Auxiliar N°5: Álgebra Lineal

Profesor: Jaime San Martín
Auxiliares: Gonzalo Contador - Gonzalo Mena

8 de septiembre de 2010

P1. *a)* Sean $B \in M_{mn}(\mathbb{R})$, $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$. Probar que $\langle Bx, y\rangle = \langle x, B^t y\rangle$.

b) Sea $A = I_n + B^t B$ y $x \in \mathbb{R}^n$. Probar que $\langle Ax, x\rangle = \|x\|^2 + \|Bx\|^2$.

c) Concluya que si $Ax = 0$ entonces $x = 0$.

P2. Sean L_1 y L_2 los conjuntos solución de los sistemas

$$L_1 \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & & & z & = & 1 \\ \alpha x & + & y & + & z & = & 0 \end{array} \right. \qquad L_2 \left\{ \begin{array}{ccccccccc} 2\alpha x & + & y & + & z & & & = & 1 \\ x & + & y & + & z & + & 2 & = & 0 \end{array} \right.$$

a) a) Resuelva los sistemas L_1 y L_2 y decida para qué valores de α los conjuntos L_1 y L_2 son rectas.

En adelante considere L_1 y L_2 son rectas.

b) Escriba ecuaciones vectoriales para L_1 y L_2

c) Determine el valor de α para que L_1 y L_2 sean ortogonales y, para ese valor de α, verifique que $L_1 \cap L_2 = \emptyset$

b) Considere el plano

$$\Pi : x + y + z = 1$$

Determine las coordenadas del punto de proyección del origen sobre el plano Π y calcule la distancia del origen al plano Π.

P3. Sean P y Q puntos distintos en $\mathbb{R}^3$
Demuestre que el conjunto $A = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x - P\| = \|x - Q\|\}$es un plano. Encuentre un punto que pertenezca a A y encuentre un vector normal al plano A.

P4. *a)* Considere los puntos $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $R = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ Verifique que son puntos no colineales y encuentre la ecuación vectorial (o paramétrica) y cartesiana del plano Π_1 que los contiene.

b) Dadas las rectas L_1, L_2 definidas por:

$$L_1 : \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \quad \text{y} \quad L_2 \left\{ \begin{array}{ccccccc} 3x & + & y & + & 4 & = & 0 \\ & & z & + & 5 & = & 0 \end{array} \right.$$

Verifique que L_1 y L_2 son paralelas y distintas y encuentre la ecuación vectorial (o paramétrica) y cartesiana del plano Π_2 que las contiene.

c) Encuentre la ecuación vectorial de la recta L que se obtiene como la intersección de los planos Π_1 y Π_2 ($L = \Pi_1 \cap \Pi_2$)

d) Encuentre el punto S de intersección de las rectas L_1 y L y verifique que S satisface la ecuación cartesiana del plano Π_1.