Clase Auxiliar N°2b: Álgebra Lineal

Profesor: Jaime San Martín
Auxiliares: Gonzalo Contador - Gonzalo Mena

31 de agosto de 2010

P1. Encuentre la solución general del sistema

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & -2 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -3 & 5 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ 4 \\ -3 \\ 8 \end{bmatrix}$$

P2. Demuestre que si una matriz cuadrada $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ verifica $A^k = I$ para algún natural $k \geq 1$, entonces A es invertible y determine su inversa.

P3. Si A es una matriz triangular superior en $M_{3,3}(\mathbb{R})$ tal que $a_{ii} = 1$ para $i = 1, 2, 3$ y $N = A - I$, verifique que $N^3 = 0$ y $A^{-1} = I - N + N^2$

P4. Sean $A \in M_{mn}(\mathbb{R})$ y $B \in M_{mn}(\mathbb{R})$

a) Muestre que si A, B y $A + B^{-1}$ son matrices invertibles entonces $A^{-1} + B$ es invertible y se cumple
$$(A^{-1} + B)^{-1} = A(A + B^{-1})^{-1}B^{-1}$$

b) Muestre que si $I + BA$ es invertible entonces $I + AB$ es invertible y se tiene $(I + AB)^{-1} = I - A(I + BA)^{-1}B$

P5. Considere las matrices cuadradas $A, B \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$. Demuestre que:

a) A es invertible $\Leftrightarrow AA^t$ es invertible.

b) Si $A = A^2$ y $B = I - A \Rightarrow B^3 = B$.

P6. Considere los vectores $u, v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Se define la matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ por $A = uv^t$.

a) Pruebe que $\forall x \in \mathbb{R}^n \, Ax = 0 \Leftrightarrow v^t x = 0$.

b) Encuentre el número de variables libres en la resolución del sistema $Ax = 0$. ¿Es A invertible?