Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Escuela de Ingeniería

Pauta Control 2
MA1101 - Introducción al Álgebra

Profesor: María Leonor Varas
Auxiliares: Rodrigo Arce, Roberto Castillo
Viernes 29 de Octubre de 2010

P1.-

1. Sean p, q reales no negativos tales que p+q = 1. Calcule:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} k^2$$

   Indicación: Note que $k^2 = k(k-1) + k$.

2. Pruebe sin usar indicción que para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{k+1} = \frac{1}{n+1}$$

Solución:

1. Se calcula la suma como sigue:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} k^2 &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} k(k-1) + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} k \\
&= \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} k(k-1) + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} k \\
&= n(n-1) \sum_{k=2}^{n} \binom{n-2}{k-2} p^k q^{n-2-(k-2)} + n \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} p^k q^{n-k} \\
&= n(n-1)p^2 \sum_{k=2}^{n} \binom{n-2}{k-2} p^{k-2} q^{n-2-(k-2)} + np \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} q^{n-1-(k-2)} \\
&= n(n-1)p^2 \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} p^k q^{n-2-k} + np \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} p^k q^{n-1-k} \\
&= n(n-1)p^2 (p+q)^{n-2} + np(p+q)^{n-1} \\
&= n(n-1)p^2 + np
\end{aligned}$$

   (3 puntos)

2. Se calcula:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^k}{k+1} &= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1}(-1)^k \\
&= -\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1}(-1)^{k+1} \\
&= -\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n+1}{k}(-1)^k \\
&= -\frac{1}{n+1}[(\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}(-1)^k 1^{n+1-k}) - 1] \\
&= -\frac{1}{n+1}[(1-1)^{n+1} - 1] \\
&= \frac{1}{n+1}
\end{aligned}$$

(3 puntos)

P2.- Se definen en $\mathbb{Z}$ las siguientes operaciones:

$$a \oplus b = a + b + 1 \qquad a \otimes b = a + b + ab$$

1. Demuestre que $(\mathbb{Z}, \oplus)$ es grupo abeliano.
2. Demuestre que $(\mathbb{Z}\backslash\{-1\}, \otimes)$ es una estructura asociativa, con neutro y conmutativa ¿Es un grupo? (Justifique su respuesta)
3. Considere ahora $A = \{z \in \mathbb{Z} | z \text{ es par }\}$ y $B == \{z \in \mathbb{Z} | z \text{ es impar }\}$ ¿alguno de ellos es subgrupo de $(\mathbb{Z}, \oplus)$ (Justifique su respuesta).

Solución:

1. Se consideran $a, b, c \in \mathbb{Z}$, se tiene que:

$$\begin{aligned}
a \oplus (b \oplus c) &= a \oplus (b + c + 1) \\
&= a + (b + c + 1) + 1 \\
&= (a + b + 1) + c + 1 \\
&= (a \oplus b) \oplus c
\end{aligned}$$

lo que prueba la asociatividad de $\oplus$ en $\mathbb{Z}$. (0.5 ptos)
Por otro lado

$$\begin{aligned}
a \oplus b &= a + b + 1 \\
&= b + a + 1 \\
&= b \oplus a
\end{aligned}$$

Con lo que se tiene que es conmutativa. (0.5 puntos)
Se tiene que el neutro de la operación es -1, pues $a \oplus -1 = a + (-1) + 1 = a$ (y como la operación es conmutativa se tiene que es el neutro.(0.2 puntos) Para encontrar el inverso de a se observa que si x es el inverso de a, debe cumplir que $a + x + 1 = -1$, lo que implica que $x = -a - 2$, que para todo a es un elemento de $\mathbb{Z}$, por lo que se concluye que $(\mathbb{Z}, \oplus)$ es grupo abeliano (0.3 puntos)

2. Dados $a, b, c \in \mathbb{Z}\backslash\{-1\}$, se tiene que

$$\begin{aligned} a \otimes b &= a + b + ab \\ &= b + a + ba \\ &= b \otimes a \end{aligned}$$

Con lo que se tiene la conmutatividad de la operación (0.5 puntos)
Por otro lado:

$$\begin{aligned} a \otimes (b \otimes c) &= a \times (b + c + bc) \\ &= a + (b + c + bc) + a(b + c + bc) \\ &= (a + b + ab) + c + (a + b + ab)c \\ &= (a + b + ab) \otimes c \\ &= (a \otimes b) \otimes c \end{aligned}$$

lo que prueba la asociatividad de $\otimes$ en $\mathbb{Z}\backslash\{-1\}$. (0.5 ptos)
Finalmente, se tiene que el neutro es el 0, pues $a \otimes 0 = a + 0 + a0 = a$ (y como la operación es conmutativa, basta con hacerlo en este sentido) (0.2 puntos) Se ve que $\mathbb{Z}\backslash\{-1\}$ no es un grupo con esta operación, pues 1 no tiene inverso, si lo tuviera, éste debería satisfacer la ecuación $1 + x + 1x = 0$, lo que sería $x = -\frac{1}{2}$, que no pertenece al conjunto.

3. Se tiene que los pares no pueden ser un subgrupo de $(\mathbb{Z}, \oplus)$, pues no contienen al neutro de este grupo que es el -1. (0.5 puntos)
Por otro lado se tiene que los impares sí son un subgrupo. En efecto, es claro que los impares son un subconjunto de $\mathbb{Z}$. Además, -1 (el neutro de $\oplus$) es impar por lo que está en el subgrupo, y dados a, b en los enteros impares, se tiene que $b^{-1} = -b - 2$ y observando que $a \oplus (-b - 2) = a - b - 1$, que es un número impar, se prueba que es un elemento del conjunto y por lo tanto el conjunto de los números impares es un subconjunto de $(\mathbb{Z}, \oplus)$. (1 punto)

P3.-
Se definen $M_k = \{A \subseteq \mathbb{N} : |A| = k\}$ y $M = \{A \subseteq \mathbb{N} : |A| < \infty\}$

1. Muestre que para todo $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, M_k es un conjunto infinito
2. Describa M_1 y muestre que $|M_1| = |\mathbb{N}|$ indicando la biyección
3. Describa M_2 y muestre que $|M_2| \leq |\mathbb{N}^2|$, concluya que M_2 es numerable
4. Muestre que $|M_k| \leq |\mathbb{N}^k|$, concluya que M_k es numerable.
5. Utilice lo anterior para determinar la cardinalidad del conjunto M

Solución:

1. Notemos que M_k es un conjunto infinito, pues se tiene que para todo $i \in \mathbb{N}$ el conjunto $A_i = \{1, 2, \ldots, k-2, k-1, k+i\}$ es un elemento de M_k. Por lo que el conjunto M_k tiene infinitos elementos. (1.2 puntos)

2. Se tiene que $M_1 = \{\{n\} : n \in \mathbb{N}\}$, por lo que la biyección es evidentemente definida por $f : \mathbb{N} \to M_1$ de modo que $f(n) = \{n\}$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$. (1.2 puntos)

3. Se tiene que $M_2 = \{\{m, n\} : m, n \in \mathbb{N}\}$, podemos inyectarlo en $\mathbb{N}^2$ asociando a todo conjunto $\{m, n\} \in M_2$ el par ordenado $(\text{mín}\{m, n\}, \text{máx}\{m, n\})$, con lo que se tiene la desigualdad para los cardinales (1 punto). Como M_2 es infinito, y $|\mathbb{N}^2| = |\mathbb{N}|$ se tiene que M_2 es numerable.(0.2 puntos)

4. Extendiendo la idea anterior $M_k = \{\{a_1, \ldots, a_k\} :\ \text{con } a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{N}\}$, podemos considerar que a cada conjunto $\{a_1, \ldots, a_k\}$ y dado que en los conjuntos el orden no es importante, podemos considerar sin pérdida de generalidad que $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_k$ y asociar de esta forma al conjunto la k-tupla $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ con lo que se tiene una inyección entre M_k y $\mathbb{N}^k$, con lo que $|M_k| \leq |\mathbb{N}^k|$ (1 punto) y como $|\mathbb{N}^k|$ es numerable, se tiene que como M_k es infinito, se ve que es numerable también. (0.2 puntos)

5. Observando que $M = \cup_{k \in \mathbb{N}} M_k$, se tiene que como cada M_k es un conjunto numerable, M es unión numerable de conjuntos numerables y, por lo tanto, es numerable. (1.2 puntos)